Séries temporelles

Université du Maine (Rattrapage, L3)
Éléments de correction

Exercice 1 **(1)** Il s'agit d'une modèle MA(2). **(2)** Non, car les ε_t ne sont pas observés. **(3)** Pour calculer la vraisemblance exacte, il faut caractériser la loi de l'échantillon. Nous savons que celle-ci est gaussienne d'espérance nulle, puisqu'il n'y a pas de constante dans le processus MA(2), il nous reste à déterminer la matrice de variance covariance du vecteur $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$. Celle-ci est obtenue directement par la définition de la fonction d'autocovariance du processus stochastique. Nous avons :

$$\gamma(0) = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \mathbb{E}[y_t y_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-3})] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma(2) &= \mathbb{E}[y_t y_{t-2}] \\ &= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-4})] \\ &= -\theta\sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

et

$$\gamma(h) = 0 \quad \forall h > 2$$

La matrice de variance-covariance de $\mathbf{y}$ est donc :

$$\Omega(\theta, \sigma_\varepsilon^2) = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & 0 & -\theta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1+\theta^2 & 0 & -\theta & 0 & \dots & 0 \\ -\theta & 0 & 1+\theta^2 & 0 & -\theta & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\theta & 0 & 1+\theta^2 \end{pmatrix}$$

La vraisemblance exacte est donc :

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma_\varepsilon^2; \mathcal{Y}_T) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} |\Omega(\theta, \sigma_\varepsilon^2)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\Omega(\theta,\sigma_\varepsilon^2)^{-1}\mathbf{y}}$$

(4) On remarque que pour tout t on a $\varepsilon_t = y_t + \theta\varepsilon_{t-2}$. En considérant les conditions initiales $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = 0$, on peut construire récursivement la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$ en utilisant l'échantillon. Comme ε_t est normalement distribué d'espérance nulle et de variance σ_ε^2, nous avons directement l'expression de la vraisemblance conditionnelle :

$$\mathcal{L}(\theta, \sigma_\varepsilon^2; \mathcal{Y}_T) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \sigma_\varepsilon^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2}$$

EXERCICE 2 **(1)** Oui, car les racines des polynômes retard des parties auto-régressive et moyenne mobiles (respectivement $3/2$ et 3) sont supérieures à 1 en module. **(2)** Les moments sont donc invariants, dès lors que la distribution de la condition initiale est égale à la distribution limite du processus stochastique. **(3)** L'espérance est telle que :

$$\mathbb{E}[y_t] = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}[y_{t-1}]$$

soit, puisque les moments sont invariants :

$$\mathbb{E}[y_t] = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}[y_t]$$

ou encore :

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)\mathbb{E}[y_t] = 1$$

et donc :

$$\mathbb{E}[y_t] = 3$$

(4) Nous avons vu le calcul de la fonction d'autocovariance en cours plusieurs fois. Vous devriez trouver :

$$\gamma(0) = \frac{6}{5}, \qquad \text{et} \quad \gamma(1) = \frac{7}{15}$$

(5) L'autocovariance d'ordre 2 est :

$$\gamma(2) = \frac{14}{45}$$

(6) Plus généralement, on a :

$$\gamma(h) = \frac{2}{3}\gamma(h-1)$$

pour tout $h > 1$. **(7)** La fonction d'autocorrélation est $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$.

EXERCICE 3 **(1)** La condition de stationnarité du processus stochastique ne porte que sur φ_1 et φ_2 (les paramètres de la partie auto-régressive). Le conditions sont les mêmes que pour le processus AR(2) vu en cours (triangle de stabilité). **(2)** La condition ne porte que sur θ qui doit être inférieur à 1. **(3)** Il faut que les racines des deux polynômes retard (ou caractéristique) soient différentes. **(4)** L'espérance est :

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{c}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$$

(5) Voir la correction pour le processus ARMA(2,2), disponible sur ma page, et poser $\theta_1 = \theta$ et $\theta_2 = 0$.