MACRO DYNAMIQUE

UNIVERSITÉ DU MAINE (ÉLÉMENTS DE CORRECTION DU PARTIEL, L3)

Mardi 11 juin 2019

EXERCICE 1 Par le théorème d'Euler, nous savons que :

$$F(K,L) = F_K(K,L)K + F_L(K,L)L$$

où F_K et F_L sont respectivement les dérivées partielles par rapport à K et L, c'est-à-dire les productivités marginales du capital et du travail. En divisant les deux membres de l'équation par L, supposé positif, et sachant que la fonction de production est homogène de degré un (et donc les dérivées partielles homogènes de degré zéro), il vient :

$$F(k,1) = F_K(k,1)k + F_L(k,1)$$

En notant $f(k) = F(k,1)$ la fonction de production intensive, il vient :

$$f(k) = f'(k)k + F_L(k,1)$$

Puisque le marché du travail est parfaitement concurrentiel, le salaire doit être égal à la productivité marginale du travail :

$$f(k) = f'(k)k + w$$

En divisant les deux membres de la dernière équation par la production par tête, on obtient :

$$1 = \frac{f'(k)k}{f(k)} + \frac{w}{y}$$

soit de façon équivalente :

$$1 - \alpha(k) = \frac{w}{y}$$

L'élasticité de la production par rapport au travail, $1-\alpha(k)$, est donc égale à w/y, la part du revenu du travail dans le revenu total.

EXERCICE 2 **(1)** La fonction de production $G(K,L)$ n'est pas une fonction de production néoclassique. En effet, même si les productivités marginales sont positives et décroissantes, même si la fonction est à rendement d'échelle constant (homogénéité de degré un), les conditions d'Inada ne sont pas toutes satisfaites. La productivité marginale du capital est :

$$G_K(K,L) = F_K(K,L) + B$$

ou, en définissant $g(k) \equiv G(k,1)$ comme la fonction de production par tête et $f(k) = F(k,1)$,

$$g'(k) = f'(k) + B$$

Clairement la limite de cette productivité marginale quand k tend vers l'infini est strictement positive :

$$\lim_{k\to\infty} g'(k) = B + \lim_{k\to\infty} f'(k) = B > 0$$

puisque $F(K,L)$ vérifie les conditions 'Inada. **(2)** La loi d'évolution du stock de capital agrégé est :

$$K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$$

soit

$$K_{t+1} = sG(K_t, L_t) + (1-\delta)K_t$$

En divisant par $L_t > 0$, il vient :

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\frac{L_{t+1}}{L_t} = sG(k_t, 1) + (1-\delta)k_t$$

puisque G est homogène de degré un. Nous avons donc :

$$(1+n)k_{t+1} = sG(k_t, 1) + (1-\delta)k_t$$

ou

$$(1+n)k_{t+1} = sg(k_t) + (1-\delta)k_t$$

En notant que $g(k) = f(k) + Bk$, on a encore :

$$(1+n)k_{t+1} = sf(k_t) + sBk_t + (1-\delta)k_t$$

Pour interpréter cette caractérisation de la dynamique, on peut déduire le taux de croissance du stock de capital. Nous avons :

$$\begin{aligned} k_{t+1} + nk_{t+1} &= sf(k_t) + sBk_t + (1-\delta)k_t \\ \Leftrightarrow \Delta k_{t+1} + nk_{t+1} &= sf(k_t) + (sB+\delta)k_t \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} + n\frac{k_{t+1}}{k_t} &= \frac{sf(k_t)}{k_t} + (sB+\delta) \end{aligned}$$

En notant $g_k(t, t+1)$ le taux de croissance de k entre t et $t+1$ il vient :

$$g_k(t, t+1) + n(1 + g_k(t, t+1)) = \frac{sf(k_t)}{k_t} + (sB+\delta)$$

C'est-à-dire :

$$(1+n)g_k(t, t+1) = \underbrace{\frac{sf(k_t)}{k_t} + sB}_{\substack{\text{Investissement par} \\ \text{unité de capital}}} - \underbrace{(n+\delta)}_{\approx\text{taux de dépréciation}}$$

Le stock de capital augmente, le taux de croissance est strictement positif, si et seulement si l'investissement par unité de capital domine le taux de dépréciation du capital par têtez. Nous retrouvons donc une condition proche de celle que nous avions dans le modèle en temps continu.
(3) Pour que le taux de croissance soit toujours positif il faut que l'investissement par unité de capital soit supérieur au taux de dépréciation du capital par tête pour tout niveau du stock de capital par tête. Le taux de croissance est une fonction du niveau de capital par tête, on a :

$$g_k(k) = \frac{s}{1+n}\frac{f(k)}{k} - \frac{n+\delta-sB}{1+n}$$

notons $varphi(k) = {}^{f(k)}/_{k}$. Puisque f vérifie toutes les propriétés d'une fonction de production néoclassique, on peut montrer que $\varphi(k)$ est une fonction (continue pour tout $k > 0$) monotone décroissante avec $\lim_{k\to 0}\varphi(k) = \infty$ et $\lim_{k\to\infty}\varphi(k) = 0$. En effet nous avons :

$$\varphi'(k) = \frac{kf'(k) - f(k)}{k^2} = -\frac{f(k)}{k^2}(1 - \alpha_f(k)) < 0$$

où $\alpha_f(k)$ est l'élasticité de $f(k)$ par rapport à k qui doit être positive est inférieure à un. La fonction φ est donc bien monotone décroissante. On a aussi :

$$\lim_{k\to 0}\varphi(k) = \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$$

par la règle de l'Hospital et les propriétés de f, et :

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(k) = \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$$

pour les mêmes raisons. Ainsi si le taux d'épargne est assez élevé, au sens où $n+\delta-sB$ est négatif, le taux de croissance de k est positif quelque soit le niveau de k. Il s'agit du régime de croissance endogène (où l'état stationnaire n'existe pas puisque la courbe du taux de croissacne ne croise jamais l'axe des abscisses). La figure 1 représente graphiquement les deux cas selon le signe de $sB-(n+\delta)$.

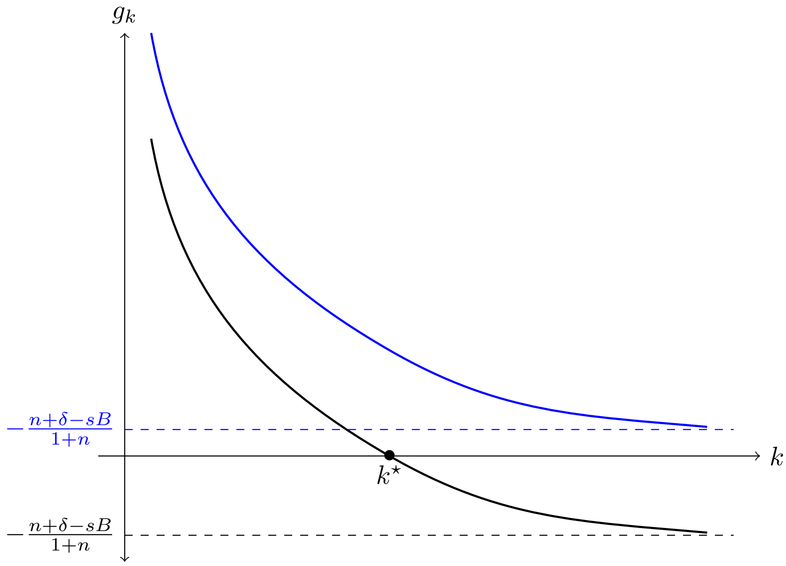

FIGURE 1 – **Taux de croissance comme une fonction du niveau.** La courbe en bleu correspond au régime de croissance endogène.

Dans le régime de croissance endogène, *i.e.* si le taux d'épargne est assez important, le taux de croissance de long terme est $\frac{sB-n-\delta}{1+n}$. Le taux taux de croissance à long terme dépend donc du comportement d'épargne, il est d'autant plus élevé que la partie du revenu consacrée à l'épargne est importante. **(4)** Si le taux d'épargne est trop faible, au sens où $s<\frac{n+\delta}{B}$ alors il existe un unique état stationnaire $k^\star>0$, puisque la courbe de taux de croissance, étant monotone décroissante, ne peut croiser qu'une unique fois l'axe des abscisses. L'état stationnaire doit vérifier :

$$\frac{f(k^\star)}{k^\star}=\frac{n+\delta-sB}{s}$$

Pour calculer la vitesse de convergence vers l'état stationnaire, on approxime la dynamique dans un voisinage de l'état stationnaire. Si on note $k_{t+1}=\psi(k_t)$ avec :

$$\psi(k)=\frac{s}{1+n}g(k)+\frac{1-\delta}{1+n}k$$

alors en utilisant une approximation de Taylor dans un voisinage de $k^\star$, on obtient :

$$\psi(k)\approx\psi(k^\star)+\psi'(k^\star)(k-k^\star)$$

Par définition de l'état stationnaire, on a $\psi(k^\star)=k^\star$ et donc :

$$k_{t+1}-k^\star\approx\psi'(k^\star)(k_t-k^\star)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\psi'(k)&=\frac{s}{1+n}g'(k)+\frac{1-\delta}{1+n}\\&=\frac{s}{1+n}f'(k)+\frac{1-\delta+sB}{1+n}\end{aligned}$$

et donc à l'état stationnaire :

$$\psi'(k^\star) = \frac{s}{1+n}f'(k^\star) + \frac{1-\delta+sB}{1+n}$$

En substituant dans la dynamique approximée, il vient :

$$k_{t+1} - k^\star \approx \left(\frac{s}{1+n}f'(k^\star) + \frac{1-\delta+sB}{1+n}\right)(k_t - k^\star)$$

En retranchant $k_t - k^\star$ sur les deux membres de la dernière équation, on obtient :

$$\Delta\left(k_{t+1} - k^\star\right) \approx \left(\frac{s}{1+n}f'(k^\star) - \frac{n+\delta-sB}{1+n}\right)(k_t - k^\star)$$

$$\Leftrightarrow \Delta\left(k_{t+1} - k^\star\right) \approx \frac{s}{1+n}\left(f'(k^\star) - \frac{n+\delta-sB}{s}\right)(k_t - k^\star)$$

Or nous savons qu'à l'état stationnaire nous devons avoir :

$$\frac{n+\delta-sB}{s} = \frac{f(k^\star)}{k^\star}$$

En substituant, il vient :

$$\Delta\left(k_{t+1} - k^\star\right) \approx \frac{s}{1+n}\left(f'(k^\star) - \frac{f(k^\star)}{k^\star}\right)(k_t - k^\star)$$

$$\Leftrightarrow \Delta\left(k_{t+1} - k^\star\right) \approx \frac{s}{1+n}\frac{f(k^\star)}{k^\star}\left(\frac{k^\star f'(k^\star)}{f(k^\star)} - 1\right)(k_t - k^\star)$$

$$\Leftrightarrow \Delta\left(k_{t+1} - k^\star\right) \approx -\frac{s}{1+n}\frac{f(k^\star)}{k^\star}\left(1 - \alpha_f(k^\star)\right)(k_t - k^\star)$$

$$\Leftrightarrow \Delta\left(k_{t+1} - k^\star\right) \approx -\left(1 - \alpha_f(k^\star)\right)\frac{n+\delta-sB}{1+n}(k_t - k^\star)$$

où $\alpha_f(k^\star)$ est l'élasticité de $f(k)$ par rapport k (attention $f(k)$ n'est pas la production par tête). On notera :

$$\beta(k^\star) = (1 - \alpha(k^\star))\frac{n+\delta-sB}{1+n}$$

la vitesse de convergence vers l'état stationnaire. En calculant le nombre de périodes nécessaires pour réduire la distance à l'état stationnaire, plus bas, on verra que cette quantité est l'unique paramètre contrôlant la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire. La vitesse de convergence dépend du taux d'épargne (rappelons que ce n'est pas le cas lorsque la fonction de production Cobb-Douglas). Il n'est pas difficile de voir que l'état stationnaire est une fonction croissante de s (se reporter à la figure 1), via l'état stationnaire dans l'élasticité $\alpha_f(k^\star)$ et le terme $-sB$ au numérateur. Notons que si $F(K,L)$ est une fonction Cobb-Douglas, alors l'élasticité α_f ne dépend pas de l'état stationnaire $k^\star$, et on peut alors conclure sans ambiguïté qu'une augmentation du taux d'épargne réduit la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire.

Puisque $\alpha_f(k^\star) \in [0,1]$, car $F(K,L)$ est une fonction de production néo-classique, et $n+\delta-sB > 0$, car l'état stationnaire existe, on sait que la vitesse de convergence est positive. On sait aussi que $\beta(k^\star)$ doit être strictement inférieur à 1, puisque $n+\delta-sB < 1+n$.

Notons $z_t = k_t - k^\star$ la distance à l'état stationnaire. On a :

$$\Delta z_{t+1} \approx -\beta(k^\star)z_t$$

Cette équation nous dit que la distance à l'état stationnaire décroît dès lors que $z_t \neq 0$. En ajoutant z_t sur les deux membres de la dernière équation :

$$z_{t+1} \approx \left(1 - \beta(k^\star)\right)z_t$$

La distance à l'état stationnaire est donc une suite géométrique de raison $1-\beta(k^\star)$. Cette suite est monotone décroissante, puisque sa raison est dans l'intervalle $[0,1]$. Le terme général de la suite

$$z_t \approx \left(1-\beta(k^\star)\right)^t z_0$$

Pour calculer le temps nécessaire pour réduire de moitié la distance à l'état stationnaire, on cherche T tel que :

$$\frac{z_T}{z_0} = \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire T tel que :

$$\left(1-\beta(k^\star)\right)^T \approx \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow T\log\left(1-\beta(k^\star)\right) \approx -\log 2$$

En notant que si $\beta(k^\star)$ est proche de zéro alors $\log\left(1-\beta(k^\star)\right)$ est peu différent de $-\beta(k^\star)$, il vient :

$$T \approx \frac{\log 2}{\beta(k^\star)}$$

Il faut donc ${}^{\log 2}/_{\beta(k^\star)} + 1$ périodes pour réduire de moitié la distance à l'état stationnaire.