CROISSANCE

(CORRECTION DE LA FICHE DE TD N°2)

Stéphane Adjemian *

Le 16 juillet 2017 à 0:34

EXERCICE 1 **(1)** Nous avons déjà montré dans la fiche de travaux dirigés n°1 que la dynamique du stock de capital par tête est caractérisée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{k}(t) = sk(t)^{\alpha} - (n+\delta)k(t)$$

À l'état stationnaire les variables par tête sont constantes. Notons $k^{\star}$ le niveau d'état stationnaire du stock de capital par tête. L'état stationnaire est solution de l'équation suivante :

$$s\ {k^{\star}}^{\alpha} = (n+\delta)k^{\star}$$

À l'état stationnaire l'investissement par tête doit être égal à la dépréciation du capital par tête. Cette équation admet deux solutions en $k^{\star}$. La solution la plus évidente est $k^{\star} = 0$. Si le stock de capital est nul alors sa dépréciation est nécessairement nulle, par ailleurs, lorsque le stock de capital est nul la production et donc l'investissement par tête sont nuls (puisque l'investissement est une fraction de la production). Nous écartons cette solution, car l'économie serait alors réduite à néant, et nous cherchons une solution strictement positive pour $k^{\star}$. En divisant les deux membres de la dernière égalité par $k^{\star}$, nous obtenons :

$$s\ {k^{\star}}^{\alpha-1} = (n+\delta)$$

À l'état stationnaire, l'investissement par unité de capital doit être égal au taux de dépréciation. Nous obtenons finalement :

$$k^{\star} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On déduit directement l'état stationnaire de la production par tête, en substi-

*Université du Maine, Gains. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

tuant ce résultat dans la fonction de production intensive [1] :

$$y^\star = k^{\star\,\alpha} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Enfin la consommation par tête à l'état stationnaire est donnée par :

$$c^\star = (1-s)y^\star = (1-s)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

(2) Une augmentation permanente du taux d'épargne induit une augmentation de l'état stationnaire du stock de capital physique par tête. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n+\delta}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n+\delta}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad > 0
\end{aligned}$$

puisque, par l'hypothèse de rendement marginal positif et décroissant du capital physique, nous avons $0 < \alpha < 1$. Puisque la production par tête est une fonction monotone croissante du stock de capital par tête, l'augmentation permanente du taux d'épargne induit nécessairement une augmentation de la production par tête à l'état stationnaire. En effet, en utilisant les dérivées en chaîne, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}y^\star}{\mathrm{d}s} = \alpha\, k^{\star\,\alpha-1}\,\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} > 0$$

Les conséquences sur le niveau à l'état stationnaire de la consommation sont moins évidentes. En effet, l'augmentation induite de la production par tête, $y^\star$, s'accompagne d'une diminution de la part consommée du revenu, $(1-s)$. Pour conclure il faut peser l'augmentation de la production avec la baisse de la propension à consommer. Nous devons donc comparer deux pentes : la pente de la part de la production consommée, constante et égale à -1, avec la pente de la production, qui dépend du niveau de s et est donnée par la dernière équation. Une augmentation du taux d'épargne induit une augmentation de la consommation à l'état stationnaire si et seulement si la pente de la production est supérieure à un (c'est-à-dire la valeur absolue de la pente de la part consommée de la production). Nous donnerons une réponse plus précise en répondant à la question suivante.

1. Celle-ci exprime la production par tête en fonction du stock de capital par tête. En effet nous avons :

$$Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$$

En divisant les deux membres par la population :

$$\frac{Y}{L} = K^\alpha L^{-\alpha}$$

en utilisant les définitions des variables par tête, on a de façon équivalente :

$$y = k^\alpha$$

L'augmentation permanente du taux d'épargne induit une augmentation de $k^\star$ et de $y^\star$. Si l'économie se situe initialement sur un état stationnaire associé à un taux d'épargne plus faible, alors l'accroissement du taux d'épargne va générer une dynamique de transition pour amener l'économie vers le nouvel état stationnaire. Durant cette transition le stock de capital par tête et la production augmentent. Au moment de l'augmentation du taux d'épargne, le niveau de la consommation par tête chute, puisque les ménages épargnent plus alors que la production commence tout juste à s'ajuster, certes à la hausse, vers le nouvel état stationnaire. Puis, en suivant la croissance de la production, la consommation par tête augmente de façon continue pour rejoindre son nouvel état stationnaire, dont on ne peut dire pour l'instant si il sera plus élevé ou moins élevé que la condition initiale de la consommation.

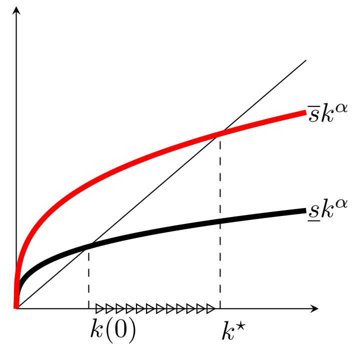

FIGURE 1 – **Transition suite à une augmentation du taux d'épargne**

(3) La consommation à l'état stationnaire est une fonction du taux d'épargne :

$$c^\star(s) = (1-s)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On vérifie facilement que la consommation de long terme (le niveau d'état stationnaire) est nulle si le taux d'épargne est nul. En effet, si le taux d'épargne est nul, alors le stock de capital physique par tête à long terme est nul (en l'absence d'investissement, le stock s'évapore, du fait de la dépréciation, jusqu'à ce que le stock disparaisse) et donc la production à long terme est nulle. Puisque la consommation est une fraction constante de la production, la consommation est forcément nulle à long terme dans ce cas. Dans le cas opposé d'un taux d'épargne égal à un, on atteint certes le niveau de long terme le plus élevé possible pour le stock de capital physique par tête ou la production par tête (voir les réponses à la question 2), mais il s'agit d'une économie où les ménages consomment une part nulle de la production ! Encore une fois la consommation à long terme est nulle. On peut tout aussi facilement vérifier, dans ces deux cas polaires, que si on augmente (en partant de zéro) ou diminue (en partant de un) marginalement le taux d'épargne alors on obtient nécessairement une augmentation de la consommation par tête à long terme. Entre ces deux cas polaires, nous cherchons une

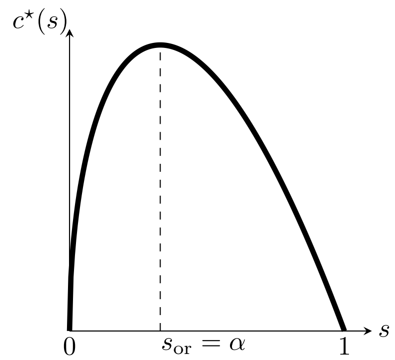

FIGURE 2 – **Taux d'épargne de la règle d'or**

valeur du taux d'épargne telle que le niveau de long terme de la consommation par tête est maximal. Si ce niveau optimal existe, alors il doit être tel qu'en ce point la dérivée de la consommation à l'état stationnaire par rapport à s est nulle. La dérivée de $c^\star$ par rapport à s est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}c^\star}{\mathrm{d}s} &= -\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-s)\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{n+\delta}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} \\
&= \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-s}{s} - 1\right]
\end{aligned}$$

Le taux d'épargne de la règle d'or s_{or}, qui maximise la consommation par tête à long terme doit être tel que :

$$\frac{\mathrm{d}c^\star(s_{\mathrm{or}})}{\mathrm{d}s} = 0$$

c'est-à-dire, en simplifiant :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-s_{\mathrm{or}}}{s_{\mathrm{or}}} = 1$$

On trouve finalement :

$$s_{\mathrm{or}} = \alpha$$

Le taux d'épargne de la règle d'or est égal à l'élasticité de la production par rapport au capital physique. Montrons qu'il s'agit bien de l'unique maximum. La dérivée de $c^\star$ par rapport à s peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}c^\star}{\mathrm{d}s} = y^\star(s)\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-s}{s} - 1\right]$$

en utilisant la définition de l'état stationnaire de la production par tête. De façon équivalente, en factorisant $^1/_{s(1-\alpha)}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}c^\star}{\mathrm{d}s} &= \frac{y^\star(s)}{s(1-\alpha)}\left[(1-s)\alpha - s(1-\alpha)\right] \\
&= \frac{y^\star(s)}{s(1-\alpha)}\left[\alpha - s\right]
\end{aligned}$$

soit par définition de s_{or} :

$$\frac{\mathrm{d}c^\star}{\mathrm{d}s} = \frac{y^\star(s)}{s(1-\alpha)}\left[s_{\mathrm{or}} - s\right]$$

Puisque la dérivée de $c^\star$ par rapport à s est positive (négative) si et seulement si $s < s_{\mathrm{or}}$ (respectivement $s > s_{\mathrm{or}}$), $s_{\mathrm{or}} = \alpha$ est bien l'unique valeur du taux d'épargne qui maximise le niveau de la consommation à l'état stationnaire.

(4) Si le taux d'épargne effectif est différent du taux d'épargne de la règle d'or, alors on sait qu'en incitant les ménages à épargner une fraction s_{or} de la production on amènera l'économie dans une situation où la consommation par tête est plus importante à long terme. On pourrait donc penser, si le but est de maximiser le niveau de la consommation par tête à long terme, que l'on aurait toujours intérêt à choisir un taux d'épargne égal à l'élasticité de la production par rapport au capital. Mais il ne faut pas omettre les conséquences sur le niveau de consommation par tête à court terme, pendant la transition qui amène l'économie vers l'état stationnaire de la règle d'or. On distinguera deux situations : le cas où l'économie est initialement en *sur accumulation* (dans le sens où le taux d'épargne effectif est supérieur à celui de la règle d'or) et le cas où l'économie est initialement en situation de *sous accumulation* (dans le sens où le taux d'épargne effectif est inférieur à celui de la règle d'or). Dans les deux cas, on suppose que l'économie est initialement à l'état stationnaire (associé à un taux d'épargne non optimal).

Sur accumulation Il s'agit du cas le plus simple. En effet si le taux d'épargne est initialement trop élevé, il faut le diminuer pour atteindre le taux d'épargne de la règle d'or. Puisque la part épargnée de la production baisse, dès le passage de s à s_{or} la consommation augmente (elle saute). Ensuite le niveau de la consommation par tête s'ajuste à la baisse jusqu'à atteindre son état stationnaire. En effet, puisque le passage au taux d'épargne de la règle d'or exige une baisse du taux d'épargne il entraîne aussi une baisse de l'état stationnaire du capital par tête et donc de la production par tête. L'économie doit rejoindre un nouvel état stationnaire où les ménages consomment plus alors que la production est plus faible. Le long de la transition vers ce nouvel état stationnaire, le stock de capital par tête, la production par tête et donc la consommation par tête baissent. Ainsi le passage de s à s_{or} est toujours profitable, à court terme et à long terme le niveau de consommation obtenu suite à la baisse du taux d'épargne est toujours supérieur à ce qu'il était initialement : $c(t) > c(0) = c^\star(s) \forall t > 0$.

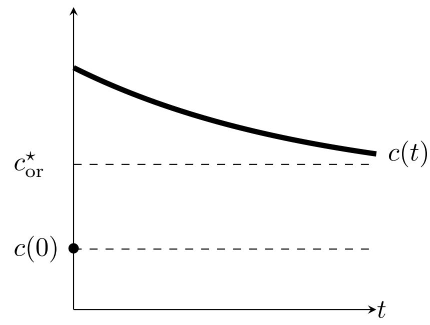

FIGURE 3 – **Transition de la consommation (sur accumulation)**

Sous accumulation Si taux d'épargne est initialement trop faible, par rapport à l'optimum, alors nous devrions augmenter celui-ci. Cela assure un niveau de consommation par tête plus élevé à l'état stationnaire, mais cela entraîne mécaniquement une baisse de la consommation initialement. Au même instant que l'augmentation du taux d'épargne, la consommation chute puis adopte un profil croissant pour rejoindre l'état stationnaire de la règle d'or. En effet, l'augmentation du taux d'épargne augmente l'état stationnaire du stock de capital par tête. Le long de la dyna-

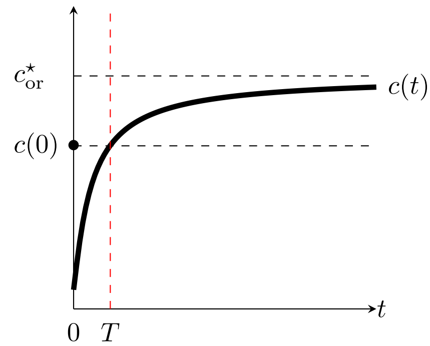

FIGURE 4 – **Transition de la consommation (sous accumulation)**

mique de transition vers le nouvel état stationnaire, le stock de capital par tête, la production par tête et donc la consommation par tête augmentent. Pendant une première période, $\forall t \in [0, T[$, suite à l'augmentation du taux d'épargne, le niveau de consommation par tête demeure sous sa condition initiale ($c(0) = c^\star(s)$), avant de le dépasser définitivement. Il faut donc mettre en balance le bénéfice à long terme avec le coût à court terme pour décider s'il est intéressant d'adopter le taux d'épargne de la règle d'or. Le choix dépendra de la préférence pour le présent des ménages. Si les ménages accordent beaucoup plus de poids au présent qu'au futur, c'est-à-dire plus de poids à la perte en termes de consommation entre 0 et T qu'aux gains entre T et ∞, ils trouveront peu intéressant le passage de s à s_{or}.

EXERCICE 2 **(1)** L'indice technologique, $A(t)$, est supposé croître à taux constant. Nous avons donc :

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = x \quad \forall\, t$$

L'introduction du progrès technique est nécessaire dans le modèle de Solow, car sans cette source exogène de croissance le taux de croissance des variables par tête est nul à long terme. Par exemple, le modèle de Solow sans progrès technique prédit que l'hypothèse de rendement marginal du capital physique résulte à long terme en un taux de croissance nul pour la production par tête. Cette prédiction contredit l'observation. **(2)** Par définition du stock de capital par tête efficace, $\hat{k}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{k}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{K}{AL} \\
&= \frac{\dot{K}(AL) - K(\dot{AL})}{(AL)^2} \\
&= \frac{\dot{K}(AL) - K\dot{A}L - KA\dot{L}}{(AL)^2} \\
&= \frac{\dot{K}}{AL} - \hat{k}\frac{\dot{A}}{A} - \hat{k}\frac{\dot{L}}{L} \\
&= \frac{\dot{K}}{AL} - (x+n)\hat{k}
\end{aligned}$$

En substituant la loi d'évolution du stock de capital physique agrégé, il vient :

$$\dot{\hat{k}} = \frac{sK^\alpha (AL)^{1-\alpha} - \delta K}{AL} - (x+n)\hat{k}$$

En exploitant le fait que la fonction de production soit homogène de degré un (rendements d'échelle constants), on a finalement :

$$\dot{\hat{k}} = s\hat{k}^\alpha - (x+n+\delta)\hat{k}$$

(3) À l'état stationnaire, l'investissement par tête efficace doit être égal au taux de dépréciation du stock de capital par tête efficace, de sorte que la variation du stock de capital par tête efficace soit nul. L'état stationnaire $\hat{k}^\star$ doit donc être la solution de :

$$s\,{\hat{k}^\star}^{\alpha} - (x+n+\delta)\hat{k}^\star$$

En excluant la solution nulle, on obtient :

$$\hat{k}^{\star} = \left(\frac{s}{n+x+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On peut déduire l'état stationnaire des autres variables à partir de ce résultat. Notons que nous n'aurions pas pu identifier un état stationnaire pour le stock de capital par tête ou le stock de capital dans ce modèle, puisque les équations différentielles dictant l'évolution de ces deux variables ne sont pas autonomes (*ie* le lien entre la variation et le niveau dépend du temps). Clairement, puisque $1/_{1-\alpha} > 0$, une augmentation permanente du taux d'épargne induit une augmentation de l'état stationnaire du capital par tête efficace et donc aussi une augmentation du niveau de long terme de la production par tête efficace. **(4)** Le taux de croissance du stock de capital par tête est donné par :

$$g_{\hat{k}} = s\hat{k}^{\alpha-1} - (x+n+\delta)$$

En notant, à partir de l'expression de l'état stationnaire donnée plus haut, qu'il est possible d'exprimer le taux de dépréciation du capital par tête efficace ($n + x + \delta$) en fonction de l'état stationnaire :

$$n + x + \delta = s\ \hat{k}^{\star\ \alpha-1}$$

En substituant dans l'équation du taux de croissance et en factorisant il vient :

$$g_{\hat{k}} = s\left(\hat{k}^{\alpha-1} - \hat{k}^{\star\ \alpha-1}\right)$$

soit encore :

$$g_{\hat{k}} = s\ \hat{k}^{\star\ \alpha-1}\left(\left(\frac{\hat{k}}{\hat{k}^{\star}}\right)^{\alpha-1} - 1\right)$$

Clairement, puisque $\alpha - 1 < 0$ à cause des rendements décroissant du capital, si $\hat{k}/\hat{k}^{\star}$ est inférieur à un, c'est-à-dire si le stock de capital par tête efficace est inférieur à son niveau de long terme, le taux de croissance est positif. Au fur et à mesure que le stock de capital par tête efficace augmente, le ratio $\hat{k}/\hat{k}^{\star}$ se rapproche de un et le taux de croissance se rapproche de zéro. Ce résultat repose sur l'hypothèse de rendements décroissants, $\alpha < 1$. Au fur et à mesure que l'économie se rapproche de l'état stationnaire en augmentant son niveau de capital, le rendement de l'investissement devient de plus en plus faible et, puisque l'épargne est une fraction constante de la production, l'investissement net de la dépréciation est de plus en plus faible ce qui résulte en une diminution du taux de croissance. **(5)** Le taux de croissance du stock de capital par tête est :

$$g_k = g_{\hat{k}} + x$$

Le taux de croissance du stock de capital est :

$$g_K = g_{\hat{k}} + x + n$$

On établit ces résultats facilement en se rappelant que le taux de croissance du produit de deux variables est la somme des taux de croissance de ces deux variables. Le taux de croissance de la production par tête efficace est proportionnel au taux de croissance du capital par tête efficace car la technologie de production (qui transforme le capital en produit) est à élasticité constante :

$$g_{\hat{y}} = \alpha g_{\hat{k}}$$

En effet :

$$g_{\hat{y}} = \frac{\dot{\hat{y}}}{\hat{y}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{k}^{\alpha}}{\hat{k}^{\alpha}} = \frac{\alpha \hat{k}^{\alpha-1}\dot{\hat{k}}}{\hat{k}^{\alpha}} = \frac{\alpha \dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \alpha g_{\hat{k}}$$

Le taux de croissance de la production par tête est :

$$g_y = g_{\hat{y}} + x$$

Puisque $x > 0$, le taux de croissance du produit par tête est nécessairement positif si le taux de croissance du produit par tête efficace est positif. Dans l'autre sens, si le taux de croissance du produit par tête efficace est négatif, alors le taux de croissance du produit par tête n'est pas nécessairement négatif.