CROISSANCE

(CORRECTION DE LA FICHE DE TD N°1)

Stéphane Adjemian *

Le 16 juillet 2017 à 0:34

EXERCICE 1 **(1)** Calculons le facteur de croissance qui correspond à un taux de croissance annuel moyen de 0.1% pendant cent cinquante ans. Le facteur de croissance annuel moyen est égal à un plus le taux de croissance annuel moyen :

$$\overline{G} = 1 + \bar{g} = 1 + 0.001$$

Le facteur de croissance sur cent cinquante années est obtenu en composant le facteur annuel moyen cent cinquante fois :

$$G_{T,T+150} = (1 + \bar{g})^{150}$$

Par définition du facteur de croissance, nous avons :

$$G_{T,T+150} = \frac{y_{T+150}}{y_T}$$

Soit de façon équivalente :

$$y_{T+150} = G_{T,T+150} y_T$$

c'est-à-dire :

$$y_{T+150} = (1 + 0.001)^{150} y_T \approx 1161.75$$

(2) Si au bout de 200 années le niveau de y est 1200, alors le facteur de croissance sur la période est 1,2. Le facteur de croissance annuel moyen est obtenu en calculant la racine 200 du facteur de croissance sur la période :

$$\overline{G} = 1,2^{\frac{1}{200}}$$

On détermine le taux de croissance annuel moyen en retranchant un au facteur de croissance annuel moyen :

$$\bar{g} = \overline{G} - 1 \approx 0.09\%$$

(3) Si le taux de croissance annuel moyen est $\bar{g} = 1.5\%$, alors le facteur de croissance annuel moyen est $\overline{G} = 1.015$. Le facteur de croissance sur T années est :

$$1.015^T$$

*Université du Maine, Gains. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

On cherche la valeur de T, c'est-à-dire le nombre d'années, telle que ce facteur de croissance est égal à deux. On doit donc résoudre l'équation suivante :

$$(1+\bar{g})^T = 2$$

Soit de façon équivalente, en appliquant la fonction logarithmique :

$$T \log(1+\bar{g}) = \log 2$$

soit finalement :

$$T = \frac{\log 2}{\log 1+\bar{g}} \approx 46.55$$

Il faut environ quarante six années et demie pour multiplier le niveau de y par deux. Notez que la réponse à la question ne dépend que du taux de croissance annuel moyen et pas de la condition initiale de y.

EXERCICE 2 **(1)** Pour calculer un taux de croissance annuel moyen, on commence par calculer le facteur de croissance sur la période, puis par prendre sa racine cinquantième pour obtenir le facteur de croissance annuel moyen. On obtient le taux de croissance en retranchant 1. Le taux de croissance annuel moyen est égal au facteur de croissance moyen moins un. Pour les états unis, nous avons :

$$\overline{G} = \left(\frac{34364.50}{11233.41}\right)^{\frac{1}{50}}$$

soit

$$\bar{g} = \overline{G} - 1 \approx 2.26\%$$

Pour l'Éthiopie, nous avons :

$$\overline{G} = \left(\frac{725.37}{329.27}\right)^{\frac{1}{50}}$$

soit

$$\bar{g} = \overline{G} - 1 \approx 1.59\%$$

(2) Notons r_t le ratio du PIB des États Unis à celui de l'Éthiopie :

$$r_t = \frac{\text{PIB}_{\text{USA},t}}{\text{PIB}_{\text{ETH},t}}$$

Nous avons :

$$r_{1950} = \frac{11233.41}{329.27} \approx 34.12$$

et

$$r_{2000} = \frac{34364.50}{725.37} \approx 47.37$$

Cette augmentation de l'écart entre les États Unis et l'Éthiopie est une conséquence de la différence sur les taux de croissance annuels moyens constatée plus haut. Le taux de croissance annuel moyen de ce ratio est :

$$\bar{g}_r = \left(\frac{r_{2000}}{r_{1950}}\right)^{\frac{1}{50}} - 1 \approx 0.66\%$$

(3) Le taux de croissance annuel moyen des États Unis sur la période est 2.26%, le niveau du PIB de l'Éthiopie en 2000 est 725.37 $, pour que l'Éthiopie atteigne le niveau des États Unis, il faudrait qu'elle multiplie son niveau de PIB par tête par $r_{2000} \approx 47.37$. On cherche donc T solution de l'équation suivante :

$$(1 + 0.0226)^T = 47.37$$

En prenant le logarithme népérien, on obtient :

$$T = \frac{\log 47.37}{\log(1 + 0.0226)} \approx 172.52$$

le nombre d'années pour que l'Éthiopie rattrape le niveau des États Unis en 2000, en supposant que le taux de croissance annuel moyen de l'Éthiopie soit celui observé pour les États Unis sur la période 1950-2000.

EXERCICE 3 **(1)** Si l'investissement croît à taux constant, alors nous avons :

$$\frac{\dot{I}(\tau)}{I(\tau)} = \rho$$

une équation différentielle d'ordre un linéaire. **(2)** On peut résoudre cette ED en notant que de façon équivalente la dynamique peut s'écrire :

$$\log \dot{I}(\tau) = \rho$$

pour tout instant τ. Ainsi en sommant sur τ entre 0 et tt, il vient :

$$\int_0^t \log \dot{I}(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \rho \mathrm{d}\tau$$

soit de façon équivalente :

$$\begin{aligned}
\log I(t) - \log I(0) &= \rho t \\
\Leftrightarrow \log I(t) - \log I(0) &= \rho t \\
\Leftrightarrow \log I(t) &= \log I(0) + \rho t \\
\Leftrightarrow I(t) &= I(0)e^{\rho t}
\end{aligned}$$

Nous avons exprimé l'investissement à l'instant t en fonction de l'investissement initial et du taux de croissance de l'investissement. **(3)** Décrivons la dynamique de l'investissement par tête si la population croît au taux constant n. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{I(t)}{L(t)} \\
&= \frac{\dot{I}(t)L(t) - I(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2} \\
&= \frac{\dot{I}(t)}{L(t)} - i(t)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \\
&= i(t)\left(\frac{\dot{I}(t)}{I(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, le taux de croissance de l'investissement par tête est donné par :

$$g_i(t) = \rho - n$$

la différence entre le taux de croissance de l'investissement total et le taux de croissance de la population. **(4)** Si le taux de croissance de la population n'est pas constant :

$$\frac{\dot{L}(\tau)}{L(\tau)} = n(\tau)$$

En sommant sur τ entre 0 et t, il vient :

$$\log L(t) - \log L(0) = \int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau$$

et donc :

$$L(t) = L(0)e^{\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

le terme exponentiel s'interprète comme un facteur de croissance, puisqu'il est égal à $L(t)/L(0)$.

EXERCICE 4 **(1)** Cette fonction de production Cobb-Douglas n'est pas néo-classique car ici elle n'est pas homogène de degré. On peut monter que les rendements d'échelle sont supérieurs à un. En effet, pour tout réel $\lambda > 1$, nous avons :

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\alpha K^\alpha \lambda^\beta L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} F(K,L) > \lambda F(K,L)$$

car $\alpha + \beta > 1$. **(2)** Le coefficient α est l'élasticité de la production par rapport au capital. En effet, nous avons :

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{Y}{K}} = \alpha K^{\alpha-1} L^\beta \frac{K}{K^\alpha L^\beta} = \alpha \frac{K^\alpha L^\beta}{K^\alpha L^\beta} = \alpha$$

(3) Cette fonction de production n'est pas néo-classique car la productivité marginale du capital physique :

$$F_K(K,L) = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} + B$$

ne tend pas vers zéro lorsque le stock de capital tend vers l'infini mais vers B. **(4)** Non, pour une fonction plus générale l'élasticité de la production par rapport au capital ne se réduit pas à un paramètre constant. L'élasticité est donnée par :

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{Y}{K}} = \left(\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} + B\right) \frac{K}{K^\alpha L^{1-\alpha}}$$

Dès lors que $B \neq 0$, l'élasticité (variable) n'est plus égale à α (on ne peut plus faire la simplification). **(5)** On vérifie facilement que cette fonction de production est homogène de degré un et que ses productivités marginales sont positives et décroissantes. Il ne s'agit pourtant pas d'une fonction de production néo-classique car les conditions d'Inada ne sont pas satisfaites pour toutes les valeurs possibles des paramètres. Considérons le cas de la productivité marginale du capital. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned} F_K(K,L) &= \alpha K^{-\gamma\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left[\alpha K^{\gamma}+(1-\alpha)L^{\gamma}\right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &= \alpha\left[\alpha+(1-\alpha)\left(\frac{L}{K}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

Le paramètre $\gamma \leq 1$ détermine l'élasticité de substitution entre les facteurs K et L :

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\gamma}$$

On distingue deux cas, suivant le signe de γ :

1. Si $\gamma < 0$, c'est-à-dire si l'élasticité de substitution est inférieure à un (l'élasticité de substitution dans le cas d'une fonction de production Cobb-Douglas), on a :

   $$\lim_{K\to 0}\left(\frac{L}{K}\right)^{\gamma} = 0$$

   et donc :

   $$\lim_{K\to 0} F_K(K,L) = \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}+1} < \infty$$

   alors que pour une fonction de production néo-classique la limite de cette productivité marginale devrait être infinie. Notez que sur l'autre bord, lorsque le stock de capital tend vers l'infini, la productivité marginale tend bien vers zéro.

2. Si $\gamma > 0$, c'est-à-dire si les facteurs sont plus substituables que dans le cas Cobb-Douglas, on a :

   $$\lim_{K\to\infty}\left(\frac{L}{K}\right)^{\gamma} = \infty$$

   et donc :

   $$\lim_{K\to 0} F_K(K,L) = \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}+1} > 0$$

   alors que que pour une fonction de production néo-classique la limite de cette productivité marginale devrait être nulle. Notez que sur l'autre bord, lorsque le stock de capital tend vers zéro, la productivité marginale tend bien vers l'infini.

Ainsi, dès lors que $\gamma \neq 0$ les conditions d'Inada ne sont pas toutes satisfaites.

EXERCICE 5 Soit $K(t)$ le stock de capital physique, $L(t)$ la population qui croît au taux constant $n > 0$, $\alpha \in]0,1[$, $s \in]0,1[$ et $\delta > 0$. La dynamique du capital physique est décrite par : $\dot{K}(t) = BK(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha} - \delta K(t)$. Déterminons la dynamique du capital physique par tête $k(t) = K(t)/L(t)$. Par définition, nous avons :

$$\dot{k}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)$$

En calculant la dérivée par rapport au temps, il vient :

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2}$$

ou encore :

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)}\frac{L(t)}{L(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\frac{K(t)}{L(t)}$$

Sachant que la population, L, croît au taux constant n et en utilisant la définition du stock de capital par tête, il vient :

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - nk(t)$$

Nous avons exprimé la variation du stock de capital par tête en fonction du niveau du stock de capital par tête et de la variation du stock de capital agrégé. Nous pouvons éliminer les variations de K rapportée à L en utilisant la loi de transition pour le stock de capital agrégé. En substituant celle-ci dans la dernière équation, il vient :

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{sK(t)^{\alpha}L(t)^{(1-\alpha)} - \delta K(t)}{L(t)} - nk(t) \\
&= s\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha}\left(\frac{L(t)}{L(t)}\right)^{1-\alpha} - (n+\delta)k(t) \\
&= sk(t)^{\alpha} - (n+\delta)k(t)
\end{aligned}$$

la variation du stock de capital par tête est donnée par différence entre l'investissement par tête et la dépréciation du stock de capital physique par tête. Le stock de capital physique par tête augmente si et seulement si l'investissement par tête est supérieur à la dépréciation du capital par tête. Notez que sans l'hypothèse de rendements d'échelle constants, c'est-à-dire si les exposants de la technologie Cobb-Douglas ne sommaient pas à un, il ne serait pas possible d'éliminer la tendance démographique (le niveau de la population $L(t)$).