ÉDUCATION, FORMATION ET CROISSANCE

CORRECTION DU PARTIEL

Le 16 juillet 2017 à 0:35

Soient $k(t)$ le stock de capital physique d'une économie à l'instant t, $L(t)$ la population qui croît au taux constant $n > 0$, $\alpha \in]0, 1[$ un paramètre technologique, $s \in]0, 1[$ le taux d'épargne et $\delta \in [0, 1]$ le taux de dépréciation du capital physique. La dynamique du stock de capital physique est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

et la technologie de production est :

$$Y(t) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha} + BK(t)$$

avec $B > 0$.

(1) Il ne s'agit pas d'une fonction de production néoclassique. Les rendements d'échelle sont bien constants, les productivités marginales sont bien positives et décroissantes, mais toutes les conditions d'Inada ne sont pas satisfaites. Lorsque le stock de capital tend vers l'infini, la productivité marginale du capital tend vers $B > 0$ et non vers zéro. Cette violation des conditions d'Inada ne nous permet pas de garantir l'existence de l'état stationnaire. Nous verrons plus loin que si B est assez grand, l'état stationnaire n'existe pas et on a de la croissance endogène (l'économie croît indéfiniment).

(2) L'élasticité est définie par :

$$\epsilon_{Y/K} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial K}}{\frac{Y}{K}}$$

En calculant la dérivée de la fonction de production par rapport à K, il vient :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{Y/K} &= \left(\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} + B\right) \frac{K}{Y} \\
&= \frac{\alpha K^\alpha L^{1-\alpha} + BK}{Y} \\
&= \frac{\alpha Y + (1-\alpha) BK}{Y} \\
&= \alpha + (1-\alpha) B \frac{K}{Y}
\end{aligned}$$

On remarque que l'élasticité est plus grande que dans le cas Cobb-Douglas (*ie* sans le terme BK dans la fonction de production). A priori, l'élasticité varie durant la transition vers l'état stationnaire (s'il existe) ou le sentier de croissance équilibrée.

(3.a) Le stock de capital physique agrégé augmente si et seulement si l'investissement brut est supérieur à la dépréciation du stock de capital physique.

(3.b) On procède exactement comme dans le cours. Par définition, la variation du stock de capital par tête est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2} \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - nk(t)\end{aligned}$$

En substituant la loi d'évolution du stock de capital physique agrégé et la fonction de production, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{sK(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha} + sBK(t) - \delta K(t)}{L(t)} - nk(t) \\ &= sk(t)^\alpha + sBk(t) - (n+\delta)k(t)\end{aligned}$$

car la fonction de production est homogène de degré un.

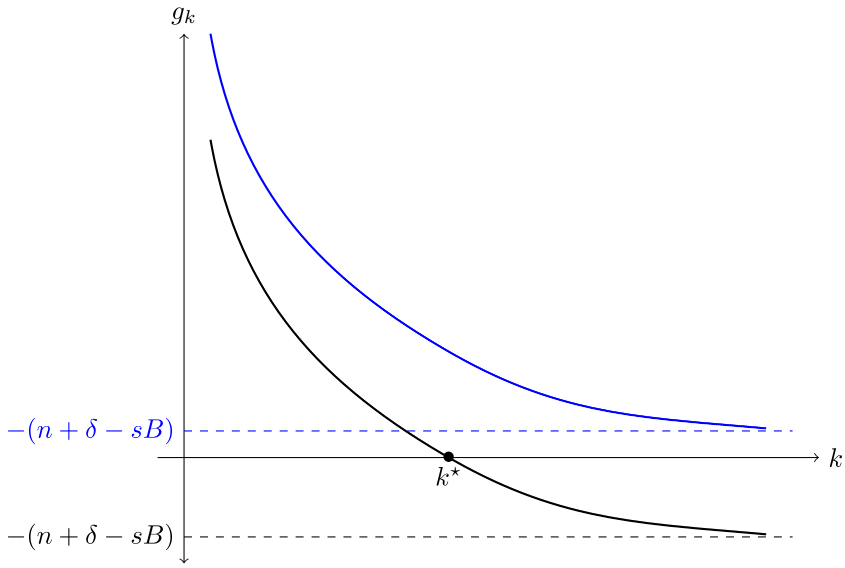
(3.c) Le stock de capital physique par tête s'accroît si et seulement si l'investissement par tête domine la dépréciation du stock de capital par tête ($n+\delta$ est le taux de dépréciation du stock de capital physique par tête).

(4) Le taux de croissance est obtenu en rapportant la variation de k à son niveau :

$$\begin{aligned}g_k(t) &= \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \\ &= \frac{sk(t)^\alpha + sBk(t) - (n+\delta)k(t)}{k(t)} \\ &= sk(t)^{\alpha-1} - (n+\delta-sB)\end{aligned}$$

Le taux de croissance est positif si et seulement si l'investissement brut par unité de capital, $sk(t)^{\alpha-1} + sB$, est supérieur au taux de dépréciation du capital physique par tête, $n+\delta$. Notons, avec la dernière expression du taux de croissance du stock de capital physique par tête, que nous obtenons une expression très proche de ce que nous obtiendrions avec une fonction de production Cobb Douglas : la seule différence formelle tient à la constante retranchée à $sk^{\alpha-1}$. Attention cette comparaison n'est que formelle, la constante $n+\delta-sB$ ne doit pas s'interpréter comme un taux de dépréciation et $sk(t)^{\alpha-1}$ n'est pas l'investissement brut par unité de capital. Néanmoins, se rapprochement formel pourra servir plus loin à vérifier l'exactitude de nos résultats (pour ceux qui ont en tête les résultats avec une fonction de production Cobb Douglas).

(5) On cherche à représenter graphiquement, dans le plan (k, g_k), la dynamique du modèle. On distinguera deux cas selon le signe de $n+\delta-sB$. Clairement, le premier terme $sk^{\alpha-1}$ est une fonction monotone décroissante, car le paramètre positif α est strictement inférieur à l'unité. Ainsi, le taux de croissance est une fonction monotone décroissante du niveau de capital par tête. On sait aussi que $\lim_{k\to\infty} sk^{\alpha-1} = 0$. Ainsi, si $n+\delta-sB$ est positif alors la courbe représentative de g_k croisera une unique fois l'axe des abscisses et si le même terme est négatif la courbe représentative de g_k ne croisera jamais l'axe des abscisses. Dans ce dernier cas, le taux de croissance est toujours strictement positif.



(6) L'état stationnaire n'existe que si $n+\delta-sB$ est positif, car cette condition assure l'existence d'un (unique) niveau $k>0$ tel que le taux de croissance est nul (voir la question précédente). Il faut donc que le taux de sB ne soit pas trop grand dans le sens où $sB < n+\delta$. Sous cette condition l'état stationnaire est donné par :

$$k^\star = \left(\frac{s}{n+\delta-sB}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On obtient directement ce résultat en cherchant le niveau de k tel que l'investissement brut par unité de capital est égal au taux de dépréciation du stock de capital physique par tête. On note en passant, que même si le taux d'épargne apparaît au dénominateur, l'état stationnaire est toujours (par rapport au cas d'une technologie Cobb-Douglas) une fonction croissante du taux d'épargne. En substituant dans la production par tête on obtient :

$$y^\star = \left(\frac{s}{n+\delta-sB}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + B\left(\frac{s}{n+\delta-sB}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En rappelant que la consommation par tête est le complémentaire de l'épargne par tête :

$$c^\star = (1-s)\left[\left(\frac{s}{n+\delta-sB}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + B\left(\frac{s}{n+\delta-sB}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]$$

Une augmentation permanente du taux d'épargne induit une augmentation permanente de l'état stationnaire de la production par tête et du stock de capital physique par tête. L'effet sur l'état stationnaire de la consommation par tête est moins trivial et dépend du niveau initial du taux d'épargne.

(7) Si l'état stationnaire existe, c'est-à-dire si $sB < n + \delta$, est le niveau de long terme de l'économie intensive. Pour comprendre ce résultat, il suffit de noter que le taux de croissance est positif lorsque $k < k^{\star}$ est négatif lorsque $k > k^{\star}$ (voir le graphique de la question 5). Dès lors la transition ramène toujours l'économie vers l'état stationnaire.

(8) Si l'état stationnaire n'existe pas, c'est-à-dire si $sB > n + \delta$, le taux de croissance est positif quel que soit le niveau du stock de capital par tête. Dans ce cas l'économie croît perpétuellement, et on parle alors de croissance endogène. Notons que dans ce cas, même si les variables croissent à long terme comme dans le modèle avec une technologie Ak (voir le cours), nous ne sacrifions pas pour autant la transition : ici le taux de croissance est toujours une fonction (décroissante de k) et varie dans le temps.

(9) Calculons le taux de croissance de la production par tête. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
g_y(t) &= \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \\
&= \frac{\alpha k(t)^{\alpha-1}\dot{k}(t) + B\dot{k}(t)}{y(t)} \\
&= \frac{\alpha k(t)^{\alpha} g_k(t) + B\dot{k}(t)}{y(t)} \\
&= \frac{\alpha y(t) g_k(t) + B\dot{k}(t) - \alpha B k(t) g_k(t)}{y(t)} \\
&= \alpha g_k(t) + (1-\alpha)B\frac{k(t)}{y(t)} g_k(t) \\
&= \underbrace{\left(\alpha + (1-\alpha)B\frac{k(t)}{y(t)}\right)}_{\epsilon_{y/k}} g_k(t)
\end{aligned}$$

Pour passer de la troisième ligne à la quatrième ligne, nous avons simplement utiliser la définition de la production par tête, $y(t) = k(t)^{\alpha} + Bk(t)$, pour remplacer $k(t)^{\alpha}$ par $y(t) - Bk(t)$. Le taux de croissance du PIB par tête est égal au taux de croissance du stock de capital physique par tête multiplié par l'élasticité de la production par rapport au capital physique. Ce résultat était attendu (par définition d'une élasticité), seule l'expression de l'élasticité est changée (par rapport au cas Cobb-Douglas habituel).

(10) Nous le voyons déjà sur le graphique donné plus haut. Plus formellement nous avons :

$$\frac{\partial g_k}{\partial k} = -(1-\alpha)sk(t)^{\alpha-2}$$

Cette dérivée est positive car $\alpha \in (0,1)$. C'est parce que le rendement du capital physique est décroissant que le taux de croissance du stock de capital physique par tête dépend négativement de son niveau. Le long de la transition [1], lorsque le stock de capital physique par tête augmente, le rendement de l'investissement diminue. Ainsi, le long de la transition, chaque unité supplémentaire consacrée à l'investissement en capital donnera moins de production demain et donc aussi moins d'investissement puisque (dans ce modèle) une part constante, s, de la production est investie. Comme le taux de croissance, nous l'avons vu plus haut, est égal au taux d'investissement net (investissement brut moins la dépréciation), le taux de croissance diminue le long de la transition (vers l'état stationnaire ou le sentier de croissance équilibrée).
La technologie adoptée dans cet exercice vérifie bien l'hypothèse de rendements décroissants (la productivité marginale du capital physique est bien décroissante) mais cette productivité marginale ne tend pas vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Cette violation des conditions d'Inada, qui explique pourquoi sous certaines conditions on peut observer de la croissance endogène, se manifeste aussi sur la valeur de l'élasticité de la production par rapport au capital (qui mesure le rendement du capital et caractérise le lien entre g_k et g_y). Si B est assez grand de sorte que l'économie croît indéfiniment alors on a :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y}{k} = \lim_{k\to\infty} k^{\alpha-1} + B = B$$

La productivité moyenne, comme la productivité marginale, tend vers B lorsque t, et donc k, tend vers l'infini. En substituant dans l'expression de l'élasticité de y par rapport à k on obtient :

$$\lim_{k\to\infty} \epsilon_{\frac{y}{k}} = \alpha + (1-\alpha)B \lim_{k\to\infty} \frac{k}{y} = 1$$

Si B est assez grand, au sens où $sB > n+\delta$, l'élasticité tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini. Autrement dit, asymptotiquement la technologie devient linéaire (*ie* équivalente à une technologie Ak) et le rendement du capital constant. Même si le taux de croissance de k est une fonction décroissante de k (pour $k < \infty$), il ne tend pas nécessairement vers zéro (dés lors que le rendement asymptotique de l'investissement par tête est supérieur au taux de dépréciation constant du capital par tête).

(11) Si l'état stationnaire existe, c'est-à-dire si $sB < n + \delta$, la vitesse de convergence vers l'état stationnaire est donnée par :

$$\beta = (1-\alpha)(n + \delta - sB)$$

Pour obtenir ce résultat il suffit de comparer l'expression de g_k dans le cas Cobb-Douglas avec celle donnée ici et de se rappeler (voir le cours) de la vitesse de convergence dans le cas Cobb-Douglas. Clairement, il suffit de remplacer $n + \delta$ par $n + \delta - sB$. On remarque qu'ici la vitesse d'ajustement vers l'état stationnaire dépend du comportement d'épargne. Plus une économie épargne plus longue sera sa transition vers l'état stationnaire (réduction de la vitesse de convergence). La vitesse d'ajustement dépend aussi du poids de la partie linéaire en k dans la fonction de production. Plus la fonction de production est linéaire (B grand) plus faible est la vitesse de convergence.

1. On suppose ici que la dotation en capital physique est faible.