CALCUL ÉCONOMIQUE

ÉLÉMENTS DE CORRECTION (FICHE DE TD N°4)

Stéphane Adjemian *

Le 16 juillet 2017 à 0:34

EXERCICE 1 **(1)** On sait que $(\log u)' =$. $f'(x) = {}^{u'}/_{u}$. $f'(x) = {}^{(2x+4x^3)}/_{(x^2+x^4+1)}$. **(2)** En utilisant le résultat précédant et la règle $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient $g'(x) = 2x\log(x^2 + x^4 + 1) + {}^{(2x^3+4x^5)}/_{(x^2+x^4+1)}$. **(3)** En utilisation la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient $h'(x) = 2e^x$. **(4)** En utilisant la règle de la dérivée logarithmique, on sait que :

$$j'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^{-1}$$

en utilisant la règle $(u/v)' = {}^{(u'v-uv')}/_{v^2}$, il vient :

$$j'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-2)}{\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^2}\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^{-1}$$

$$j'(x) = x\frac{x^3+3x-2}{\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^3}$$

(5) En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées : $k'(x) = -\theta\sin(\theta x)$.

EXERCICE 2 **(1)** On a $f'(x) = \theta e^{\theta x}$, $f''(x) = \theta^2 e^{\theta x}$, $f'''(x) = \theta^3 e^{\theta x}$ et plus généralement on admet que $f^{(n)}(x) = \theta^n e^{\theta x}$. On peut montrer que ce résultat est correcte en raisonnant par récurrence. On sait que la formule est correcte au rang 1 (aussi au rangs 2 et 3). On postule qu'elle est vraie au rang n. Montrons que l'on retrouve nécessairement le même résultat au rang $n + 1$. On a :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$$

En substituant la formule au rang n, il vient :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\theta^n e^{\theta x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = \theta^n \left(e^{\theta x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = \theta^n \theta e^{\theta x}$$

*Université du Maine, Gains. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

$$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x) = \theta^{n+1} e^{\theta x}$$

On retrouve le même résultat qu'au rang n (en remplaçant n par $n+1$). Le résultat énoncé plus haut est donc correcte. **(2)** On a $g'(x) = -1/x^2$, $g''(x) = 2 \times 1/x^3$, $g'''(x) = -3 \times 2 \times 1/x^4$, $g'''(x) = 4 \times 3 \times 2 \times 1/x^5$. Plus généralement, on a :

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \times n! \times 1/x^{(n+1)}$$

On peut montrer ce résultat en utilisant un argument par récurrence. **(3)** On a $h'(x) = 1/x$ et plus généralement $h^{(n)}(x) = g^{(n-1)}(x)$ par définition de la fonction g.

EXERCICE 3 On établit le résultat en utilisant le théorème de Taylor dans un voisinage de 0 et en notant que la dérivée d'ordre n de e^x est e^x. On a :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^0 (x-0)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Le radius de convergence est infini pour la fonction exponentielle. En évaluant l'égalité en $x = 1$, on obtient :

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

EXERCICE 4 En utilisant le théorème de Taylor dans un voisinage de 0 et en notant que les dérivées de $1/1-x$ sont :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

il vient :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1-0} (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

On retrouve la série géométrique. Puisque la série n'est définie que si $|x| < 1$ il faut que le radius de convergence soit un.

EXERCICE 5 Puisque le coefficient devant x^3 est négatif, on sait que $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. La dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 2$$

Puisque le discriminant associé est positif :

$$\Delta = 4 + 4 \times 3 \times 2 = 4 \times 7$$

On sait qu'il existe $\underline{x}$ et $\overline{x}$ tels que $f'(\underline{x}) = f'(\overline{x}) = 0$:

$$\underline{x} = \frac{2-2\sqrt{7}}{3}$$
$$\overline{x} = \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$$

Puisque la parabole est tournée vers le bas (le coefficient sur x^2 est négatif), on sait que la dérivée $f'(x)$ est positive si et seulement si $x \in]\underline{x}, \overline{x}[$. Puisque la dérivée change de signe autour de $\underline{x}$ et $\overline{x}$ on sait que ces deux points sont des optima locaux. La dérivée seconde, $f''(x) = -6x + 2$, est négative (*ie* f est concave) si et seulement si $x > 1/3$. On a donc $f''(\underline{x}) > 0$ et $f''(\overline{x}) < 0$, $\underline{x}$ est un maximum local et $\overline{x}$ est un minimum local.

EXERCICE 6 On commence en notant que le domaine de définition est $\mathbb{R}_+$. La limite en zéro est :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

et pour la limite en l'infini on a une forme indéterminée que l'on peut lever avec la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log x)^2}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$$

qui est encore une forme indéterminée. En appliquant une seconde fois la règle de l'Hospital, il vient :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

La dérivée de la fonction f est :

$$f'(x) = \frac{\log(2-\log x)}{x^2}$$

Cette dérivée est nulle si $x = 1$ ou si $x = e^2$, elle est positive si et seulement si $x \in]1, e^2[$. La fonction f est donc décroissante entre 0 (asymptote verticale) et 1 (minimum) où elle atteint zéro, puis croissante entre 1 et e^2 (maximum local) où elle atteint $4e^{-2}$, et à nouveau décroissante entre e^2 et ∞ où elle retourne vers zéro.

EXERCICE 7 Trivial. Calculer $f'(x)$. C'est un polynôme d'ordre 2. Calculer le discriminant, exclure le cas où celui-ci est négatif (f est alors monotone puisque f' ne change pas de signe). Calculer $f''(x)$, il s'agit d'un polynôme d'ordre 1 (une droite). Montrer que le point $x^\star$ tel que $f''(x^\star) = 0$ est entre les deux racines du polynôme d'ordre 2 (f').

EXERCICE 8 On utilise la règle de l'Hospital.

EXERCICE 9 **(a)** On cherche à résoudre le problème suivant :

$$(x^\star, y^\star) = \arg\max_{\{x,y\}} xy$$
$$\underline{sc} \quad x + y = 100$$

En substituant la contrainte dans l'objectif, on résoudre le problème par rapport à x (puis déduire y optimal avec la contrainte) :

$$x^\star = \arg\max_{\{x,y\}} x(100 - x)$$

$x^\star$ annuler la dérivée de l'objectif, et donc vérifier :

$$-2x^\star + 100 = 0$$

On a donc $x^\star$, et donc $y^\star$. **(b)** On procède de la même façon (on trouve aussi $x^\star = y^\star = 50$).