CALCUL ÉCONOMIQUE
(Éléments de correction)

Stéphane Adjemian *

Le 16 juillet 2017 à 0:34

EXERCICE 1 Il faut faire une table de vérité. Puisque nous devons établir une proposition faisant intervenir trois propositions (P, Q et R) et que chacune de ces propositions peut prendre deux valeurs (V et F), la table de vérité doit contenir $2^3 = 8$ lignes.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La proposition est donc vraie puisque la dernière colonne contient la valeur V (vraie) sur toutes les lignes.

EXERCICE 2 **(a)** Nous utilisons une table de vérité avec $2^2 = 4$ lignes.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Puisque la troisième colonne et la cinquième colonne ont les mêmes valeurs de vérité sur chaque ligne, on a bien l'équivalence entre $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \vee Q$. Autrement dit, il est possible d'exprimer l'implication logique avec une négation et le connecteur logique «ou». **(b)** On sait que l'équivalence logique est une double implication, c'est-à-dire que $P \Leftrightarrow Q$ est équivalent à $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. On vient de montrer que l'implication peut s'exprimer à l'aide d'une négation et du connecteur logique «ou». Par ailleurs nous savons que pour deux propositions A et B nous avons $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$. Nous pouvons donc réécrire le résultat précédant sous la forme :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P \wedge \overline{Q}}$$

*Université du Maine, Gains. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

En faisant de même pour $Q \Rightarrow P$ on obtient le résultat désiré.

Exercice 3 Pour $n = 1$, nous avons bien $1 + x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $n = 2$, nous avons $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$, puisque le carré est non négatif, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $n = 3$, si x est positif nous avons : $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \geq 1 + 3x$ car la somme des deux derniers termes est nécessairement non négative. Supposons que l'inégalité soit vraie au rang n, c'est-à-dire que $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $x \geq 0$, et montrons que l'inégalité est nécessairement vérifiée au rang $n + 1$, c'est-à-dire que l'on a $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$ pour tout x positif ou nul. Nous avons :

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \\ &\geq (1 + x)(1 + xn) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x\end{aligned}$$

où le passage de la première ligne à la deuxième est obtenu en substituant l'inégalité au rang n et en notant que le facteur $(1+x)$ est nécessairement positif. Nous avons donc bien retrouvé l'inégalité au rang $n+1$. Cette inégalité est donc vraie pour tout n.

Exercice 4 Cette proposition se lit comme suit : « Pour tout ϵ positif, il existe $\delta(\epsilon)$ positif, tel que pour tout x dans l'intervalle I $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ dès lors que $|x - a| < \delta(\epsilon)$ ». Il s'agit de la définition d'une fonction continue sur l'intervalle I.

Exercice 5 Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2}{3}(1 + x)^{-\frac{1}{3}}(2 - x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(1 + x)^{\frac{2}{3}}(2 - x)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}(1 + x)^{-\frac{1}{3}}(2 - x)^{-\frac{2}{3}} \left(2(2 - x) - (1 - x)\right) \\ &= \frac{1 - x}{(1 + x)^{\frac{1}{3}}(2 - x)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

La dérivée de f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $x = -1$ et $x = 2$, c'est-à-dire lorsque le dénominateur est nul. Nous avons des asymptotes en ces deux points :

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to2^-} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to2^+} f'(x) = -\infty$$

On remarque aussi que la dérivée est nulle en $x = 1$. Ces trois points sont des optima potentiels, il reste à vérifier qu'il y a bien un changement de signe des dérivées autour de ces points.

— Autour de $x = -1$ nous avons : $f'(x) < 0 \quad \forall x < -1$ et $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$. Il y a donc bien un signe autour de la singularité en $x = 1$. Il s'agit d'un minimum local.
— Autour de $x = 1$ nous avons : $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$ et $f'(x) < 0 \quad \forall x > 1$. Il y a un changement de signe de la pente autour du point où la dérivée est nulle. Il s'agit donc d'un maximum local.

— Autour de $x = 2$ il n'y a pas de changement de signe de la pente puisque $f'(x) < 0 \quad \forall x > 1$. Il ne s'agit donc pas d'un optimum local.

Pour résumer, la fonction possède deux optima locaux : un minimum local au point $x = -1$ et un maximum local au point $x = 1$.

Exercice 6 **(a)** $f \circ g(x)$ est une fonction de I dans K. **(b)** Une composition de fonctions continues est continue. **(c)** La dérivée de $f \circ g(x)$ est donnée (voir le cours) par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \circ g(x) = f'(g(x))g'(x)$$

(d) Il faut dérivée la dérivée pour obtenir la dérivée d'ordre deux :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f \circ g(x) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(g(x))\right) g'(x) + f'(g(x))g''(x) \\ &= f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)\end{aligned}$$

Exercice 7 On note que $x = 1$ est une racine évidente puisque $P(1) = 0$. Le polynôme peut donc s'écrire sous la forme factorisée :

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

Il reste à déterminer les paramètres a, b et c. On procède par identification en développant l'expression précédente :

$$\begin{aligned}P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c\end{aligned}$$

On doit donc avoir $a = 1$, $c = \frac{5}{4}$ et $b = 1$. Nous pouvons donc réécrire le polynôme sous la forme :

$$P(x) = (x-1)(x^2 + x + \frac{5}{4})$$

Calculons les racines du polynôme d'ordre deux. Le discriminant est :

$$\Delta = 1 - 4\frac{5}{4} = -4$$

Puisque le discriminant est complexe, nous savons que les deux racines sont complexes :

$$x = \frac{1 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} - i \\ \frac{1}{2} + i \end{cases}$$

Au final le polynôme $P(x)$ possède trois racines : $x = 1$, $x = \frac{1}{2} - i$ et $\frac{1}{2} + i$.

Exercice 8 Soit $f(x)$ une fonction continue en x_0. La dérivée de f en x_0 est définie par la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Calculons la dérivée de la fonction exponentielle en utilisant cette définition :

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat donné dans l'énoncé, on obtient :

$$(e^x)' = e^x$$