

CALCUL ÉCONOMIQUE

Stéphane Adjemian *

Le 16 juillet 2017 à 0:34

EXERCICE 1 Soit deux propositions P et Q . Montrer que $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$

EXERCICE 2 (1) Donner la définition de la dérivée d'une fonction. **(2)** Soit la fonction $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de montrer que la dérivée de cette fonction est $f'(x) = nx^{n-1}$. Montrer que cette formule est correcte pour $n = 1$ (en utilisant la définition de la dérivée). **(3)** Montrer que si la formule est vraie au rang n alors elle est nécessairement vraie au rang $n + 1$. Conclure.

EXERCICE 3 On note y_t le PIB de la France à la date t et on suppose que cette variable est déterminée par l'équation :

$$y_t = 1,02y_{t-1}$$

avec une condition initiale $y_0 = 1$. **(1)** Quel est le taux de croissance du PIB? **(2)** Donner le niveau du PIB à la date t . **(3)** Calculer le nombre de périodes nécessaires pour doubler le niveau du PIB. **(4)** Montrer que le niveau du PIB tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini.

EXERCICE 4 Sur un marché la demande pour un bien à la date t est linéaire par rapport au prix du bien :

$$q_t = a - bp_t$$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs. Sur le même marché, la quantité offerte à la date t dépend du prix anticipé (à la date $t - 1$) pour la date t :

$$q_t = c + d\hat{p}_t$$

où c et d sont deux paramètres réels positifs, \hat{p}_t est le prix anticipé pour la période t . On supposera que les anticipations sont naïves dans le sens où :

$$\hat{p}_t = p_{t-1}$$

Les offreurs anticipent que le prix à la date t sera le prix observé à la date $t - 1$. **(1)** Montrer que la quantité offerte est égale à la quantité demandée si et seulement si le prix à la date t est donné par :

$$p_t = \frac{a - c}{b} - \frac{d}{b}p_{t-1} \equiv f(p_{t-1})$$

*Université du Maine, Gains. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

(2) Calculer le point fixe (on dit aussi état stationnaire) de cette équation récurrente pour le prix, c'est-à-dire calculer p^* tel que $p^* = f(p^*)$. Quelle hypothèse faut-il poser sur les paramètres pour que ce prix ait un sens? (3) Montrer que p^* est le prix d'équilibre sur ce marché. Calculer la quantité échangée à l'équilibre. (4) Calculer le prix à la t . (5) Donner la condition sous laquelle le prix converge vers p^* . Commenter. La convergence est-elle monotone?

EXERCICE 5 Montrer que la fonction $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, n'est pas bijective.

EXERCICE 6 Donner trois conditions assurant la convexité d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

EXERCICE 7 Sur un marché la quantité offerte (q) est donnée comme une fonction du prix par :

$$q = p^2$$

et la demande est déterminée par :

$$q = 6 - p$$

(1) Montrer qu'il existe un unique prix d'équilibre $p^* > 0$. (2) Donner une représentation graphique des fonctions de demande et d'offre, et de l'équilibre.

EXERCICE 8 Soient f et g deux fonctions pour lesquelles les dérivées d'ordre 1 et deux sont définies. (1) Quelle est la dérivée de la composition $f(g(x))$? (2) Calculer la dérivée d'ordre deux de $f(g(x))$. (3) Quelle est la dérivée d'ordre deux de $h(x) = x^4$. (4) Vérifier que la formule obtenue pour la dérivée d'ordre deux donne un résultat correct si $f(g(x)) = (x^2)^2$.