CALCUL ÉCONOMIQUE
(Éléments de correction)

Stéphane Adjemian *

Le 16 juillet 2017 à 0:34

EXERCICE 1 Il faut faire une table de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Les valeurs dans la quatrième et la septième colonnes sont identiques, nous avons donc bien :

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$$

EXERCICE 2 **(1)** La dérivée d'une fonction f est définie par la limite suivante :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(2) Pour $n = 1$ on a $f(x) = x$. La formule nous dit alors que $f'(x) = 1 \times x^0 = 1$ pour tout x. Montrons que c'est bien le cas, en utilisant la définition de la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

La formule est donc correcte au rang $n = 1$. On suppose maintenant que la formule est correcte à un rang n quelconque, montrons qu'elle est alors nécessairement vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que nous avons bien :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+1} = (n+1)x^n$$

Nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \times x^n$$

En appliquant la règle $(uv)' = u'v + uv'$ il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+1} = 1 \times x^n + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n$$

*Université du Maine, Gains. `stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr`

En substituant la formule supposée vraie au rang n :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = x^n + x \times n \times x^{n-1}$$

soit de façon équivalente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = x^n + n \times x^n$$

ou encore :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = (n+1)x^n$$

ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE 3 On note y_t le PIB de la France à la date t et on suppose que cette variable est déterminée par l'équation :

$$y_t = 1,02 y_{t-1}$$

avec une condition initiale $y_0 = 1$. **(1)** Notons $g_{y,t}$ le taux de croissance du PIB entre les dates $t-1$ et t. Par définition du taux de croissance on a :

$$g_{y,t} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1$$

En appliquant cette formule on trouve directement que le taux de croissance du PIB est constant :

$$g_{y,t} = 1,02 - 1 = 0,02$$

soit 2%. **(2)** À la date 1, nous avons :

$$y_1 = 1,02 y_0 = 1,02$$

À la date 2, nous avons :

$$y_2 = 1,02 y_1 = 1,02^2$$

À la date 3 :

$$y_3 = 1,02 y_2 = 1,02^3$$

Plus généralement, on peut montrer par récurrence que l'on a :

$$y_t = 1,02^t$$

(3) Plaçons nous à la date t, on cherche s tel que :

$$\frac{y_{t+s}}{y_t} = 2$$

En substituant le résultat à la question précédente :

$$\frac{1,02^{t+s}}{1,02^t} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1,02^s = 2$$

En appliquant le logarithme népérien sur les deux membres de l'égalité il vient :

$$s \log 1,02 = \log 2$$

soit de façon équivalente :

$$s = \frac{\log 2}{\log 1.02}$$

Le logarithme de 2 est approximativement égal à 0.69. Le logarithme de $\log(1+x)$ peut être approximer par $1+x$ pour des petites valeurs de x (approximation de Taylor à l'ordre un). On a donc

$$s \approx \frac{0,69}{0,02} = 34,5$$

Il faut donc de l'ordre de 35 périodes pour doubler le niveau du PIB si le taux de croissance est égale à 2%. **(4)** On peut montrer que lorsque t tend vers l'infini, le niveau du PIB diverge vers l'infini. Il suffit de remarquer que la suite est monotone croissante (en effet $y_t - y_{t-1} = 0,02 \times y_{t-1} > 0$ pour tout t). Ainsi pour tout t les termes suivants (en $t+1$, $t+2$, ...) sont toujours plus grands. On peut remarquer aussi que y_t est une suite géométrique de raison (1,02) supérieure à 1 en valeur absolue.

EXERCICE 4 Sur un marché la demande pour un bien à la date t est linéaire par rapport au prix du bien :

$$q_t = a - bp_t$$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs. Sur le même marché, la quantité offerte à la date t dépend du prix anticipé (à la date $t-1$) pour la date t :

$$q_t = c + d\hat{p}_t$$

où c et d sont deux paramètres réels positifs, $\hat{p}_t$ est le prix anticipé pour la période t. On supposera que les anticipations sont naïves dans le sens où :

$$\hat{p}_t = p_{t-1}$$

Les offreurs anticipent que le prix à la date t sera le prix observé à la date $t-1$. **(1)** Si l'offre est égale à la demande, alors on doit avoir :

$$a - bp_t = c + d\hat{p}_t$$

en substituant l'anticipation naïve, il vient :

$$a - bp_t = c + dp_{t-1}$$

soit de façon équivalente :

$$p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}p_{t-1}$$

(2) $p^\star$ doit satisfaire :

$$a - bp^\star = c + dp^\star$$

$$\Leftrightarrow a - c = (b+d)p^\star$$

$$\Leftrightarrow p^\star = \frac{a-c}{b+d}$$

Si $p_t = p^\star$ alors $p_{t+s} = p^\star$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Pour que ce point fixe puisse être interprété comme un prix il faut qu'il soit positif, c'est-à-dire que $a > c$. **(3)** En substituant le point fixe $p^\star$ dans les fonctions d'offre et de demande, on remarque que :

$$D(p^\star) = S(p^\star) = \frac{da + bc}{b+d}$$

La quantité offerte égalise la quantité demandée. $p^\star$ est donc bien un prix d'équilibre. **(4)** Supposons que le prix à la date 0 soit $p_0 \neq p^\star$. On omet le cas où le prix est initialement à l'équilibre car on sait que le prix est alors à l'équilibre pour toute date $t > 0$. À la date 1, nous avons :

$$p_1 = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} p_0$$

À la date 2 :

$$p_2 = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} p_1 = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{d}{b}\right) + \left(\frac{d}{b}\right)^2 p_0$$

À la date 3 :

$$p_3 = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} p_2 = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{d}{b} + \left(\frac{d}{b}\right)^2\right) - \left(\frac{d}{b}\right)^3 p_0$$

Plus généralement nous devrions avoir :

$$p_t = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{d}{b} + \left(\frac{d}{b}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t-1}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)^t p_0$$

ou de façon équivalente :

$$p_t = \frac{a-c}{b} \sum_{\tau=0}^{t-1} \left(-\frac{d}{b}\right)^\tau + \left(-\frac{d}{b}\right)^t p_0$$

ou encore :

$$p_t = \frac{a-c}{b} \frac{1 - \left(-\frac{d}{b}\right)^t}{1 + \frac{d}{b}} + \left(-\frac{d}{b}\right)^t p_0$$

Admettons que cette formule soit correcte au rang t et montrons que nous retrouvons alors nécessairement la même au rang $t+1$. Nous avons

$$p_{t+1} = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b} p_t$$

En substituant l'expression pour p_t, il vient :

$$p_{t+1} = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}\left(\frac{a-c}{b} \frac{1 - \left(-\frac{d}{b}\right)^t}{1 + \frac{d}{b}} + \left(-\frac{d}{b}\right)^t p_0\right)$$

$$\Leftrightarrow p_{t+1} = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{d}{b}\frac{1-\left(-\frac{d}{b}\right)^t}{1+\frac{d}{b}}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1} p_0$$

$$\Leftrightarrow p_{t+1} = \frac{a-c}{b}\left(1 - \frac{\frac{d}{b}-\left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1}}{1+\frac{d}{b}}\right) + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1} p_0$$

$$\Leftrightarrow p_{t+1} = \frac{a-c}{b}\frac{1-\left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1}}{1+\frac{d}{b}} + \left(-\frac{d}{b}\right)^{t+1} p_0$$

ce qu'il fallait démontrer. Nous avons donc bien obtenu l'expression du prix à la date t comme une fonction du prix initial (p_0) et des paramètres des fonctions de demande et d'offre. **(5)** Clairement le prix ne diverge pas que si $b < d$ de sorte que $\lim_{t\to\infty}(-{}^{b}\!/\!_{d})^t = 0$. Dans ce modèle où les anticipations sont naïves, il faut que la demande soit moins « pentue » que l'offre pour que prix ne diverge pas. Sous cette condition, on voit directement que :

$$\lim_{t\to\infty} p_t = p^\star$$

Le prix converge vers le prix d'équilibre du marché dès lors que $b < d$. Cette convergence n'est pas monotone. Pour le montrer, notons que nous pouvons écrire l'écart entre p_t et $p^\star$ comme une fonction de l'écart entre p_0 et $p^\star$:

$$p_t - p^\star = (p_0 - p^\star)\left(-\frac{b}{d}\right)^t$$

Clairement le signe de $p_t - p^\star$ change à chaque itération, la suite p_t oscille donc autour de $p^\star$.

EXERCICE 5 Il suffit de remarquer que $f(-1) = f(1) = 1$.

EXERCICE 6 **(i)** Une fonction f est convexe si sa courbe représentative se situe au dessus de ses tangentes. **(ii)** Une fonction f est convexe si pour tout x, y dans le domaine de définition de f et tout $\lambda \in [0,1]$ on a $f(\lambda x + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. **(iii)** Une fonction f est convexe si $f''(x) \geq 0$ pour tout x dans le domaine de f.

EXERCICE 7 L'équilibre, s'il existe, doit égaliser l'offre et la demande sur le marché. On doit donc chercher un prix tel que :

$$p^2 = 6 - p$$

$$\Leftrightarrow p^2 + p - 6 = 0$$

Le prix d'équilibre est une racine d'un polynôme d'ordre 2. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1 + 4 \times 6 = 25$. Il existe donc deux racines. Il n'y a cependant pas d'incertitude sur le prix d'équilibre puisque les racines sont de signes opposés. L'unique prix d'équilibre correspond à l'unique racine positive du polynôme d'ordre : $p^\star = 2$ (l'autre racine n'est pas économiquement pertinente).

EXERCICE 8 **(1)** On a d'après le cours :

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

(2) On obtient la dérivée d'ordre deux en dérivant à nouveau la dérivée d'ordre un donnée plus haut :

$$(f(g(x)))'' = (f'(g(x)) \times g'(x))'$$

$$\Leftrightarrow (f(g(x)))'' = (f'(g(x)))' \, g'(x) + f'(g(x))g''(x)$$

$$\Leftrightarrow (f(g(x)))'' = f''(g(x)) \left(g'(x)\right)^2 + f'(g(x))g''(x)$$

(3) $h''(x) = 4 \times 3x^2$. **(4)** Notons que $h(x) = \left(x^2\right)^2$, en appliquant la formule pour la dérivée d'ordre deux d'une composition de fonction, on obtient :

$$h''(x) = 2 \times (2x)^2 + 2(x^2)^3 \times 2$$

$$h''(x) = 8x^2 + 4x^2$$

$$h''(x) = 12x^2$$

Nous retrouvons bien le même résultat qu'au point (3).