Calcul Économique

(Devoir surveillé, éléments de correction)

Stéphane Adjemian *

Le 19 novembre 2018 à 19:43

Exercice 1 **(1)** La disjonction exclusive si et seulement si exactement une des deux propositions est vraie. On peut définir ce connecteur logique à l'aide de la table de vérité suivante :

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(2) On peut montrer, par exemple à l'aide d'une table de vérité, que $(P \oplus Q) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \overline{P \wedge Q})$. **(3)** On a :

$$\begin{aligned}\overline{P \oplus Q} &\Leftrightarrow \overline{(P \vee Q) \wedge \overline{P \wedge Q}} \\ &\Leftrightarrow \overline{P \vee Q} \vee \overline{\overline{P \wedge Q}} \\ &\Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q)\end{aligned}$$

Exercice 2 Soient 3 propositions P, Q et R, nous devons montrer que

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Nous utilisons une table de vérité contenant huit lignes psuique nous travaillons avec trois propositions : P, Q et R :

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Comme la dernière colonne est vraie sur toutes les lignes, c'est-à-dire pour tout triplet de valeurs de vérité des propositions P, Q et R, la proposition relative à la transitivité de l'implication logique est vraie.

*Université du Maine, Gains. stephane DOT adjemian AT univ DASH lemans DOT fr

EXERCICE 3 Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Vérifions que la formule est correcte au rang $n = 1$. Dans ce cas le membre de gauche de l'égalité est égale à 2, et le membre de droite donne :

$$\frac{1 \times 2 \times 3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

La formule est donc correcte au rang 1. Montrons que si la formule est vraie à un rang n quelconque, alors elle est nécessairement vraiment vraie au rang suivant $n+1$. Nous supposons donc que :

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

est vraie, et cherchons à montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{n} i(i+1) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. La formule est donc toujours vraie, puisque nous savons qu'elle est vraie au rang $n = 1$ et puisque nous venons de montrer que si elle est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

EXERCICE 4 Soient les fonctions d'offre et de demande :

$$\begin{aligned}
D(p) :& q = a - p \\
S(p) :& q = b + 2p
\end{aligned}$$

où a et b sont des paramètres réels positifs. **(1)** Les paramètres a et b représentent respectivement la demande et l'offre de bien quand le prix est nul. **(2)** Dans le plan prix quantité, la demande est une droite décroissante de pente -1 reliant les points $(0, a)$ et $(a, 0)$. Dans le même plan, l'offre est une droite croissante de pente 2 reliant les points $(0, b)$ et $(-b/2, 0)$ **(3)** Pour qu'un prix d'équilibre existe il faut les deux droites aient un point d'intersection, ce qui est le cas ici puisque pentes sont différentes, et que ce point d'intersection se situe dans l'orthan positif, puisqu'un prix doit être positif. Cela n'est possible que si $a > b$. Sous cette condition le prix d'équilibre est :

$$p^\star = \frac{a-b}{3}$$

EXERCICE 5 Le discriminant est $\Delta = 1-4 = -3$. Puisque le déterminant est négatif, nous savons que l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$x^\star = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

EXERCICE 6 En utilisant une identité remarquable on a directement :

$$f(x) = (x+1)^2 + 1$$

Cette fonction est supérieure ou égale à 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque le premier terme est le carré dn nombre réel (et donc positif). Pour minimiser f, il faut minimiser le premier terme. Comme celui-ci est positif ou nul, il faut trouver x tel que le premier terme est nul. Le minimum est atteint lorsque x est égal à -1.