

Évaluation de la politique monétaire dans un modèle DSGE pour la zone euro

Stéphane Adjemian*, Antoine Devulder†

14 novembre 2010

1 Introduction

Dans cette contribution, nous montrons comment un modèle DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*) peut être utilisé pour évaluer la politique monétaire dans la zone euro. Depuis une dizaine d'années, sous l'impulsion des travaux de [Smets et Wouters \(2003, 2005, 2007\)](#), les modèles DSGE envahissent progressivement les banques centrales. Ces modèles sont utilisés pour construire des prévisions, interpréter des prévisions obtenues à partir de modèles athéoriques et/ou de jugements d'experts, mettre en œuvre des expériences de politique économique.

Pour construire les projections macroéconomiques à moyen terme sur lesquelles s'appuient les décisions de politique monétaire, les banques centrales ont besoin d'outils à la fois précis et interprétables. Les modèles athéoriques de type VAR sont réputés pour afficher de bonnes performances prédictives, mais ils ne permettent pas de construire un discours économique convaincant pour soutenir les prévisions obtenues et alimenter les discussions qui les entourent. De ce fait, les banques centrales de l'Eurosystème utilisent le plus souvent de gros modèles macroéconométriques pour ces exercices. Ces outils ont l'avantage de coller précisément avec le cadre de la comptabilité nationale, mais présentent des défauts importants : ils souffrent de l'absence d'une structure pleinement cohérente avec la théorie économique, négligent les effets des anticipations et leur estimation est biaisée (voir [Sims \(2002\)](#)). Au total, les projections obtenues avec ces outils et leur cohérence d'ensemble reposent en partie sur l'information apportée au modèle par les prévisionnistes lors de la simulation. Ce recours au «jugement d'experts», matérialisé par le calage de variables exogènes ou des résidus des équations économétriques, permet d'enrichir la simulation en utilisant des sources et des expertises sectorielles diverses, mais dégrade la lisibilité des mécanismes économiques qui sous-tendent la prévision. L'idée d'utiliser des modèles d'équilibre général microfondés, estimés par la méthode bayésienne, dans le cadre de prévisions macroéco-

* Université du Maine, GAINS & CEPREMAP. e-mail : stephane [DOT] adjemian [AT] ens [DOT] fr

† Banque de France.

nomiques institutionnelles, a été popularisée par [Smets et Wouters \(2003\)](#). Ils montrent qu'un modèle DSGE néo-keynésien en économie fermée, incluant un nombre suffisant de rigidités et de chocs structurels, est à même de reproduire de manière satisfaisante les données de la zone euro ou des États-Unis et d'afficher des performances prédictives moyennes comparables à celles d'un VAR¹. Une telle comparaison entre un modèle DSGE et un modèle macroéconométrique traditionnel, tant en termes de performances prédictives moyennes qu'en termes de cohérence économique, n'est pas pertinente car, comme cela est évoqué plus haut, le recours au jugement d'experts est crucial pour la simulation de prévisions crédibles avec ces derniers outils. Ceci explique sans doute en partie l'engouement des banques centrales pour les travaux visant à intégrer des modèles microfondés dans la pratique des prévisions institutionnelles.

Nous présentons le modèle dans la section 2, discutons les méthodes de simulation et d'estimation dans la section 3, présentons l'estimation du modèle dans la section 4 et proposons deux exercices autour du modèle dans la section 5. Dans le premier exercice, nous utilisons le modèle pour évaluer le coût en bien être des fluctuations et nous nous demandons si l'autorité monétaire ne pourrait pas utiliser une meilleure règle de fixation du taux d'intérêt (du point de vue du bien être des ménages). Dans le second exercice, nous interrogeons le modèle sur l'avantage d'une politique monétaire accommodante face à un choc de productivité négatif.

2 Le modèle

Le modèle considéré ici est proche du modèle proposé par [Smets et Wouters \(2007\)](#). Il s'agit d'un modèle d'équilibre général stochastique en économie fermée, où différents agents (des ménages et des firmes) réagissent de façon optimale à des fluctuations de variables exogènes (comme des chocs sur l'efficacité du travail). La figure 1 décrit les flux de biens entre les différents agents du modèle. Les ménages achètent une certaine quantité de bien homogène aux entreprises du secteur de production du bien final pour consommer (C) et accumuler du capital (K) et achètent des titres émis par l'État. Pour financer ses dépenses, ils bénéficient de transferts forfaitaires de l'État, obtiennent des revenus financiers grâce à la location du capital accumulé aux firmes du secteur de production des biens intermédiaires et aux rendement des titres émis par l'État, et finalement, obtiennent un revenu du travail.

1. Les comparaisons données par [Smets et Wouters \(2003\)](#) sont cependant fragiles. Le modèle DSGE a une structure stochastique plus riche celle d'un modèle VAR. Dès lors il n'est pas étonnant que les performances *in sample* du DSGE soient supérieures. Si la comparaison en faveur des DSGE est un argument de vente pour les institutions, l'avantage du modèle DSGE vient surtout de sa structure cohérente avec les mécanismes économiques théoriques.

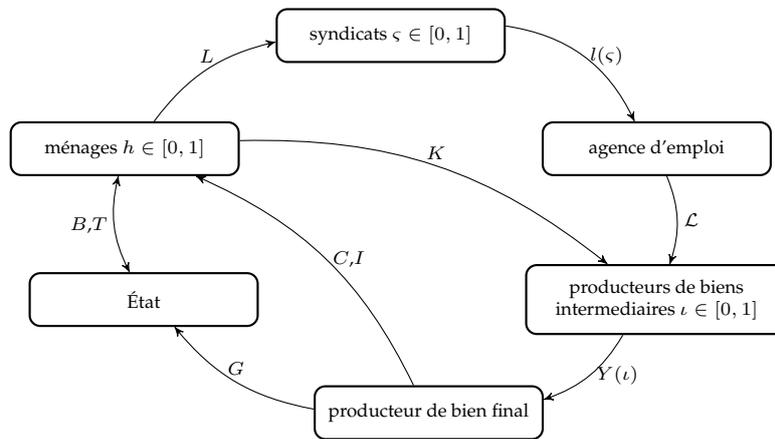


FIGURE 1 – Le modèle DSGE

Les firmes, indicées par $\iota \in [0, 1]$, du secteur de production du bien intermédiaire agissent dans un environnement imparfaitement concurrentiel. Elles transforment le capital, loué aux ménages (K), et le travail (\mathcal{L}), indirectement offert par les ménages, en biens intermédiaires ($Y(\iota)$). Les ménages sont propriétaires des firmes ; ainsi, les profits éventuellement réalisés leur sont reversés. Les biens intermédiaires étant imparfaitement substituables, chaque firme du secteur dispose d'une marge de manœuvre dans le choix du prix du bien intermédiaire, et donc bénéficie d'une rente. Idéalement, une firme ι devrait mettre à jour le prix ($P(\iota)$) du bien produit ($Y(\iota)$) à chaque date de façon à maximiser son profit. Mais nous supposons l'existence d'une rigidité nominale à la Calvo (1983) : la firme ι n'a la possibilité de choisir son prix à une date t que si elle reçoit un signal, tombé du ciel, qui n'apparaît qu'avec une certaine probabilité constante. Nous verrons plus bas, en section 2.2, comment cette rigidité affecte le comportement des firmes du secteur intermédiaire. Les firmes du secteur de bien final agissent dans un environnement parfaitement concurrentiel. Elles achètent des biens intermédiaires et les agrègent afin de produire un bien homogène qui alimentera la consommation (C) et l'investissement (I) des ménages et sera consommé par l'État (G)².

Du côté de l'offre de travail, nous introduisons une rigidité sur le salaire nominal en adoptant une structure à l'image de celle utilisée du côté de l'offre de biens. Les ménages offrent du travail homogène (L) à des syndicats, indicés par $\varsigma \in [0, 1]$, qui différencient le travail (en formant $l(\varsigma)$) et offrent ce travail différencié à des agences d'emplois. Celles-ci agrègent le travail différencié (\mathcal{L}) pour l'offrir à des firmes du secteur intermédiaire. Les agences d'emploi sont concurrentielles alors que les syndicats opèrent sur un marché en concurrence monopolistique. Cette imperfection concurrentielle n'a d'autre but que d'introduire une rigidité

2. Nous pourrions considérer un modèle sans le secteur de production du bien final, en supposant que les ménages agrègent eux même les biens intermédiaires, c'est-à-dire en supposant que ceux-ci consomment un panier de bien différenciés plutôt qu'un bien homogène. Sous certaines conditions cela serait parfaitement équivalent. L'hypothèse implicite, avec la modélisation adoptée ici, est que les biens intermédiaires sont agrégés de la même façon pour la consommation et l'investissement (et aussi les dépenses publiques). Une conséquence directe est qu'il n'y aura pas ici de différence entre l'indice des prix à la consommation et l'indice des prix de l'investissement.

à la Calvo sur le salaire nominal : les syndicats ne peuvent librement choisir le salaire nominal à chaque date mais doivent attendre un signal qui apparaît avec une probabilité constante.

2.1 Les ménages

L'économie est peuplée par un continuum de ménages $h \in [0, 1]$. Chaque ménage valorise la consommation d'un bien homogène, on note $C_t(h)$ la demande en ce bien du ménage h à la période t , et voit son bien-être diminuer avec le nombre d'heures de travail offert, on notera $L_t(h)$ l'offre de travail du ménage h à la période t . Le bien-être (ou l'utilité intertemporelle) d'un individu h à la date t est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_t(h) &= u_t(h) + \beta \mathbb{E}[\mathcal{W}_{t+1}(h)] \\ u_t(h) &= \frac{[C_t(h) - \eta \bar{C}_{t-1}]^{1-\sigma_c}}{1-\sigma_c} \exp \left\{ \varepsilon_{L,t} \frac{\sigma_c - 1}{1 + \sigma_l} L_t(h)^{1+\sigma_l} \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $\varepsilon_{L,t}$ est un choc sur la désutilité du travail (un processus ARMA stationnaire d'espérance $\log \tilde{L}$ ³). Nous avons choisi une fonction d'utilité intertemporelle à la King, Plosser et Rebelo qui, en annulant la somme des effets substitution et revenu liés à une augmentation du salaire réel, est compatible avec un sentier de croissance équilibré (voir par exemple [Basu et Kimball \(2002\)](#)). Nous supposons que l'utilité obtenue en t par le ménage h dépend à la fois du niveau de consommation en t du ménage h mais aussi du niveau de consommation agrégée à la période précédente, $\bar{C}_{t-1} = \int_0^1 C_{t-1}(h) dh$; il s'agit d'un mécanisme de formation d'habitudes *externe* destiné à introduire de l'inertie dans la demande des ménages. La contrainte budgétaire réelle du ménage h à la période t est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} (1 + \tau_{C,t}) C_t(h) + p_{I,t} I_t(h) &= (1 - \tau_{R,t}) \left\{ \frac{B_{t-1}(h)}{P_t} - \frac{B_t(h)}{P_t \varepsilon_{B,t} R_t} + (1 - \tau_{W,t}) \frac{W_t^m}{P_t} L_t(h) \right. \\ &\quad \left. + r_t^k z_t(h) K_{t-1}(h) + \frac{\mathcal{D}_{1,t}(h) + \mathcal{D}_{2,t}(h)}{P_t} \right\} + T_t(h) \end{aligned} \quad (2.2)$$

où P_t est l'indice agrégé des prix, $R_t = 1 + i_t$ le facteur d'intérêt nominal; $B_t(h)$ le montant nominal de titres détenus par le ménage h à la période t ; ε_t^B représente une prime de risque demandée par les ménages en contrepartie de la détention d'un titre ou, plus généralement, reflète les inefficiences du marché du crédit ($\log \varepsilon_t^B$ est un processus ARMA stationnaire); $C_t(h)$ la consommation de h à la période t ; $\tau_{C,t}$ est une taxe sur la consommation ($\log(1 + \tau_{C,t})$ est un processus ARMA stationnaire d'espérance positive); $I_t(h)$ l'investissement de h à la période t ; $\log p_{I,t}$ est un processus ARMA stationnaire d'espérance nulle rendant compte de variations

3. ce paramètre nous donne un degré de liberté pour ajuster le niveau de long terme des heures et n'a d'autre intérêt que de faciliter le calcul de l'état stationnaire du modèle.

exogènes du prix relatif de l'investissement ; W_t^m le taux de salaire horaire nominal à la période t perçu par le ménage ; $T_t(h)$ représente les transferts gouvernementaux forfaitaires perçus par le ménage h à la période t ; $\tau_{w,t}$ est une taxe sur le revenu du travail ($\log(1 - \tau_{w,t})$ est un processus ARMA d'espérance négative) ; $\mathcal{D}_{1,t}(h)$ et $\mathcal{D}_{2,t}(h)$ représentent les dividendes perçus par le ménage h à la période t , provenant respectivement des firmes du secteur intermédiaire et des syndicats qui différencient le travail des ménages. Du côté des ressources, les revenus du capital physique sont donnés par :

$$r_t^k z_t(h) K_{t-1}(h)$$

où le stock de capital physique à la date t est donné par :

$$K_t(h) = (1 - \delta(z_t(h)))K_{t-1}(h) + \varepsilon_{I,t} \left(1 - \mathcal{S} \left(\frac{I_t(h)}{I_{t-1}(h)} \right) \right) I_t(h) \quad (2.3)$$

$r_t^k > 0$ est le rendement du capital ; $z_t(h) \in [0, 1]$ est le taux d'utilisation du capital physique, dont le niveau de long terme sera noté z^* ; le taux de dépréciation du capital physique, δ , est une fonction croissante du taux d'utilisation du capital vérifiant : $\delta(0) = 0$, $\delta(1) = 1$, $\delta(z)' > 0$ pour tout $z \in [0, 1]$ et on notera $\delta(z^*) = \delta^*$; $\varepsilon_{I,t}$ représente un aléa sur l'efficacité de la technologie d'accumulation du capital ($\log \varepsilon_{I,t}$ est un processus ARMA d'espérance nulle) ; la fonction \mathcal{S} représente un coût d'ajustement sur l'investissement, supposé tel que $\mathcal{S}(1 + g) = 0$, avec g le taux de croissance de l'investissement le long du sentier de croissance équilibré, $\mathcal{S}(1 + g)' = 0$ et $\mathcal{S}'' > 0$. Finalement, $\tau_{R,t}$ est une taxe sur l'ensemble des revenus du ménage ($\log(1 - \tau_{R,t})$ est un processus ARMA stationnaire d'espérance négative).

Le coût d'ajustement convexe sur l'investissement induit une persistance des décisions d'épargne du ménage, puisque les variations du niveau d'investissement (en écart au taux de croissance de long terme de l'économie) sont coûteuses. An total, la persistance de la demande des ménages en bien final, pour l'investissement et la consommation, est contrôlée par la fonction \mathcal{S} (ses dérivées première et seconde) et le paramètre η (qui caractérise l'importance du phénomène de formation d'habitudes). Le taux de dépréciation est supposé endogène de façon à induire un coût (bénéfice) lorsque le taux d'utilisation du capital est supérieur à z^* (inférieur à z^*). Ce mécanisme traduit simplement l'idée que les machines s'usent plus vite si elles sont plus intensivement utilisées. Une augmentation du taux d'utilisation du capital génère un coût, mais celui-ci peut être compensé par l'augmentation induite des revenus du capital. On peut ainsi définir un équilibre pour le taux d'utilisation du capital. L'endogénéisation du taux de dépréciation permet de limiter les sur-ajustements du taux d'utilisation

du capital liés au coût d'ajustement quadratique sur l'investissement.

Chaque ménage h choisit des trajectoires pour la consommation, l'offre de travail, la détention de titres, le capital, l'investissement et le taux d'utilisation du capital, en maximisant son utilité intertemporelle (2.1) sous la contrainte budgétaire (2.2) et la loi d'évolution de son stock de capital physique (2.3), sachant les chemins des prix, les variables exogènes contemporaines et les distributions futures de ces variables. Les conditions du premier ordre associées au programme d'un consommateur h sont données dans l'annexe A.1.

2.2 La production et la formation des prix

2.3 Producteurs du bien homogène

Les producteurs du bien final, Y_t , agissent dans un environnement parfaitement concurrentiel en assemblant un continuum de biens intermédiaires, notés $Y_t(\iota)$ avec $\iota \in [0, 1]$. Ils ont accès à une technologie d'agrégation à rendements constants commune à la [Kimball \(1996\)](#), implicitement définie par :

$$\int_0^1 \mathcal{G}_f \left(\frac{Y_t(\iota)}{Y_t} \right) d\iota = 1 \quad (2.4)$$

où \mathcal{G}_f est une fonction strictement croissante et concave telle que $\mathcal{G}_f(1) = 1$. Nous suivons [Dotsey et King \(2005\)](#) ou [Levin et al. \(2007\)](#) en adoptant la fonction suivante :

$$\mathcal{G}_f(x) = \frac{\theta_f(1 + \psi_f)}{(1 + \psi_f)(\theta_f(1 + \psi_f) - 1)} \left[(1 + \psi_f)x - \psi_f \right]^{\frac{(1 + \psi_f)\theta_f - 1}{(1 + \psi_f)\theta_f}} - \left[\frac{\theta_f(1 + \psi_f)}{(1 + \psi_f)(\theta_f(1 + \psi_f) - 1)} - 1 \right] \quad (2.5)$$

Cette fonction généralise l'agrégateur [Dixit et Stiglitz \(1977\)](#) que nous retrouvons lorsque $\psi_f = 0$. Ce paramètre contrôle la courbure de la fonction de demande. Le producteur de bien final représentatif choisit la quantité de bien intermédiaire ι de façon à maximiser son profit réel, $Y_t - \int_0^1 \frac{P_t(\iota)}{P_t} Y_t(\iota) d\iota$, sous sa contrainte technologique (2.4) et (2.5). L'élasticité prix de la demande en bien f est alors donnée par :

$$\epsilon \left(\tilde{Y}_t(\iota) \right) = \theta_f \left[1 + \psi_f - \frac{\psi_f}{\tilde{Y}_t(\iota)} \right]$$

Dans le cas où ψ_f est nul, on retrouve l'agrégateur CES [Dixit et Stiglitz \(1977\)](#) avec une élasticité prix de la demande constante égale à θ_f . Plus généralement, l'élasticité prix de la demande (et donc le taux de marge des firmes du secteur des producteurs des biens intermédiaires) dépend du niveau de la demande relative. On supposera dans la suite que le paramètre ψ_f est négatif, de sorte que l'élasticité prix est une fonction dé-

croissante de la demande relative et donc croissante du prix relatif. Comme le taux de marge des firmes du secteur intermédiaire est une fonction décroissante de l'élasticité prix de la demande, cette fonction d'agrégation implique une relation décroissante entre le taux de marge et le prix relatif. Ainsi, une firme du secteur intermédiaire qui optimise son prix appliquera un taux de marge plus faible sur le coût marginal qu'une firme qui n'a pas la possibilité d'ajuster optimalement son prix (du fait de la rigidité à la Calvo (1983)) et dont le prix relatif décroît. Ce mécanisme, spécifique à la technologie d'agrégation à la Kimball (1996), contribue à augmenter la rigidité des prix.

Finalement, la condition de nullité du profit dans ce secteur définit l'indice de prix du bien final comme une agrégation des prix des biens intermédiaires (voir l'annexe A.2.1).

2.4 Producteurs des biens intermédiaires

Un continuum de firmes $\iota \in [0, 1]$ en concurrence monopolistique produisent les biens intermédiaires utilisés par les producteurs du bien homogène. Les firmes accèdent toutes à la même technologie de production Cobb-Douglas pour transformer le capital physique et le travail en bien intermédiaire différencié :

$$Y_t(\iota) = (K_t^d(\iota))^\alpha (A_t L_t^d(\iota))^{1-\alpha} \quad (2.6)$$

où $K_t^d(\iota)$ et $L_t^d(\iota)$ sont respectivement les demandes de la firme intermédiaire ι en capital physique et en travail, A_t représente le progrès technique neutre au sens de Harrod. On suppose que celui-ci se décompose sous la forme du produit de $\mathcal{A}_{T,t}$ et $\mathcal{A}_{C,t}$, les composantes tendancielle et cycliques de l'efficacité du travail ($\log \mathcal{A}_{C,t}$ est un processus ARMA d'espérance $\log \bar{\mathcal{A}}_C$ et $\Delta \log \mathcal{A}_{T,t}$ est un ARMA d'espérance g).

Chaque firme intermédiaire $\iota \in [0, 1]$ peut librement accéder à des marchés concurrentiels afin d'obtenir des facteurs de production ; chaque firme considère donc les prix du travail et du capital comme une donnée. La firme $\iota \in [0, 1]$ décide du mélange optimal de capital physique ($K_t^d(\iota)$) et de travail ($L_t^d(\iota)$) de façon à minimiser ses coûts, $r_t^k K_t^d(\iota) + (1 + \tau_{L,t}) w_t L_t^d(\iota)$, sous la contrainte technologique (2.6), où $w_t \equiv W_t/P_t$ est le salaire horaire réel, $\tau_{L,t}$ représente les taxes sur le travail payées par l'employeur ($\log(1 + \tau_{L,t})$ est un processus ARMA stationnaire d'espérance positive). On montre alors que le ratio de la demande de capital physique à la demande de main d'oeuvre et le coût marginal sont invariants dans la coupe des firmes $\iota \in [0, 1]$.

Le profit nominal d'une firme qui propose le prix \mathcal{P} à la date t est donné par :

$$\Pi_t(\mathcal{P}) = \left(\varepsilon_{y,t} \frac{\mathcal{P}}{P_t} - mc_t \right) \left[\left(\frac{\mathcal{P}}{P_t} \right)^{-(1+\psi_f)\theta_f} \left(\int_0^1 \left(\frac{P_t(\iota)}{P_t} \right)^{1-(1+\psi_f)\theta_f} df \right)^{\frac{(1+\psi_f)\theta_f}{1-(1+\psi_f)\theta_f}} + \psi_f \right] \frac{P_t Y_t}{1 + \psi_f}$$

où $\varepsilon_{y,t}$ (dont le logarithme est un processus ARMA stationnaire d'espérance nulle) est un choc sur le chiffre d'affaire des firmes. Ce choc mesure l'efficacité des firmes du secteur des biens intermédiaires à recouvrir le paiement de ses ventes⁴. Ce choc réduit ou augmente la marge effective (sur le prix) des firmes du secteur ; lorsque $\varepsilon_{y,t} < 1$ la marge de la firme sur le prix est réduite. La firme ι dispose d'un pouvoir de marché mais elle ne peut décider de façon optimale du prix $P_t(\iota)$ à toutes les dates ; elle est soumise à une loterie à la [Calvo \(1983\)](#). À chaque date, la firme reçoit un signal lui signifiant si elle peut ou non réviser son prix de façon optimale. Avec une probabilité ξ_p la firme ne pourra réviser librement son prix et elle applique la règle suivante :

$$P_t(\iota) = \bar{\pi}^{1-\gamma_p} \left[\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right]^{\gamma_p} P_{t-1}(\iota) = \Gamma_t P_{t-1}(\iota) \quad (2.7)$$

où $\bar{\pi}$ est la cible d'inflation de l'autorité monétaire. Ainsi, lorsqu'une firme reçoit un signal défavorable, elle indice son prix sur une combinaison convexe de l'inflation cible de la banque centrale et de l'inflation à la période précédente. Une valeur de γ_p strictement positive permet d'accroître la persistance de l'inflation dans le modèle. Si la firme ι reçoit un signal favorable (avec probabilité $1 - \xi_p$) alors elle va choisir le prix $P_t(\iota)$ qui maximise la somme espéré des profits futurs actualisés, tout en sachant qu'il existe une probabilité strictement positive pour qu'elle ne reçoive que des signaux défavorables pendant un certain nombre de périodes. Elle sait qu'il lui faudra attendre en moyenne $(1 - \xi_p)^{-1}$ périodes avant de recevoir à nouveau un signal favorable. Ainsi, lorsque la firme choisit son prix à la date t , elle doit prendre en compte les conséquences de ce choix sur le profit contemporain mais aussi sur ses profits futurs.

Soient $\tilde{\mathcal{V}}_t$ la valeur d'une firme qui reçoit un signal favorable à la date t et $\mathcal{V}_t(P_{t-1}(\iota))$ la valeur d'une firme qui reçoit le mauvais signal à la date t . Une firme recevant un signal défavorable suit simplement la règle *ad hoc* (2.7). Cela explique pourquoi sa valeur à la date t dépend de $P_{t-1}(\iota)$. À l'inverse, le programme d'une firme recevant un signal favorable est purement tourné vers le futur, sa valeur à la date t ne dépend d'aucune variable d'état endogène. De plus, puisque les firmes ont les mêmes espérances quant au futur, elles choisiront toutes le même prix optimal. On peut donc dire que l'histoire n'a d'importance que pour les firmes défavorisées dans

4. Il reçoit une interprétation différente du choc d'efficacité A_t car il n'affecte que les recettes et pas les coûts. De plus il est stationnaire, contrairement à A_t .

la loterie à la [Calvo \(1983\)](#). Plus formellement, la valeur à la date t d'une firme recevant le signal favorable est :

$$\tilde{\mathcal{V}}_t = \max_{\mathbf{P}} \left\{ \Pi_t(\mathbf{P}) + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \left((1 - \xi_p) \tilde{\mathcal{V}}_{t+1} + \xi_p \mathcal{V}_{t+1}(\mathbf{P}) \right) \right] \right\} \quad (2.8)$$

où Λ_t est le multiplicateur de la contrainte budgétaire nominale des ménages⁵. On notera P^* le prix optimal d'une firme ayant la possibilité d'ajuster comme elle le souhaite son prix. La valeur à la date t d'une firme malchanceuse dans la loterie à la [Calvo \(1983\)](#) est :

$$\mathcal{V}_t(P_{t-1}(\iota)) = \Pi_t(\Gamma_t P_{t-1}(\iota)) + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \left((1 - \xi_p) \tilde{\mathcal{V}}_{t+1} + \xi_p \mathcal{V}_{t+1}(\Gamma_t P_{t-1}(\iota)) \right) \right] \quad (2.9)$$

La condition du premier ordre et la condition de l'enveloppe du programme d'une firme recevant un signal favorable dans la loterie à la [Calvo \(1983\)](#) permettent de caractériser son prix et, en agrégeant, de caractériser la dynamique de l'inflation (voir l'annexe [A.2.2](#)).

2.5 Le travail et la formation des salaires

Le travail homogène $L_t = \int_0^1 L_t(h) dh$ offert par les ménages est différencié par un continuum de syndicats $\varsigma \in [0, 1]$. Les syndicats revendent le travail différencié, $l_t(\varsigma)$, à une agence d'emploi qui agrège le travail pour le proposer comme facteur de production aux firmes du secteur des biens intermédiaires. Les syndicats jouent en concurrence monopolistique et l'agence d'emploi adopte un comportement concurrentiel. Chaque syndicat, à l'instar des firmes du secteur des biens intermédiaires, exploite une rente et dispose d'un degré de liberté pour choisir le salaire de façon à maximiser son profit. On introduit une rigidité sur le salaire en supposant que ces syndicats participent à une loterie à la [Calvo \(1983\)](#). La modélisation de l'offre de travail et de la formation des salaires adoptée ici est isomorphe à la modélisation de la production et de la formation des prix ; une description plus détaillée en est donnée dans l'annexe [A.3](#).

Le lecteur pourrait s'interroger sur l'intérêt ou le réalisme du modèle adopté ici. En effet, on ne voit pas très bien quelle pourrait être la contrepartie empirique de ces syndicats. Au delà du vocabulaire discutable, il faut comprendre que l'existence de ces agents n'a d'autre but que de limiter le degré d'hétérogénéité dans le modèle. Un formalisme alternatif consisterait, comme [Erceg et al. \(2000\)](#), à supposer que les ménages ne délèguent pas la différenciation du travail à des syndicats mais qu'ils sont hétérogènes dans le sens où ils offrent un travail différencié. Évidemment, cette hétérogénéité va *a priori* affecter les décisions intertemporelles des ménages et se manifester par des décisions financières (accumulation du capital physique, demande de bons

5. Nous avons donc $P_t \Lambda_t = \lambda_t$

du trésor,...) hétérogènes, ce qui complique considérablement l'agrégation des comportements des ménages et *in fine* la résolution et l'estimation du modèle. On peut montrer qu'il est possible de mettre en œuvre un système d'assurance⁶ tel que l'utilité marginale de la consommation soit invariante dans la coupe des ménages $h \in [0, 1]$ (voir [Christiano et al. \(2005\)](#)). Dans [Erceg et al. \(2000\)](#) ou [Christiano et al. \(2005\)](#), les préférences sont additivement séparables entre la consommation et le travail. Ainsi l'égalisation des utilités marginales induit l'invariance dans la coupe des choix de consommation. L'agrégation des comportements des ménages devient alors triviale. Dans notre cas, les préférences (2.1) ne sont pas additivement séparables⁷ et nous ne pouvons réduire l'hétérogénéité des ménages. La fiction adoptée ici nous permet d'éliminer le problème d'hétérogénéité, qui, étant donnée la dimension du modèle, rendrait les simulations et l'estimation impossibles.

2.6 Le gouvernement

L'État perçoit l'ensemble des taxes (proportionnelles et forfaitaires) et absorbe une partie de la production de l'économie domestique $G_t = g_t Y_t$, sous la forme de dépenses publiques. On suppose que $\log g_t$ est un processus ARMA stationnaire d'espérance $\log g^*$. Il finance son déficit, formé par la différence entre ses dépenses publiques (production domestique absorbée et remboursement de sa dette) d'une part et ses recettes fiscales d'autre part, par l'émission de titres de dette B_t :

$$\begin{aligned}
P_t G_t + P_t \int_0^1 T_t(h) dh + B_{t-1} &= \frac{B_t}{\varepsilon_{B,t} R_t} \\
&+ \tau_t^C P_t C_t + \tau_{W,t} W_t^m L_t + \tau_{L,t} W_t \int_0^1 L_t^d(\iota) d\iota \\
&+ \tau_{R,t} \left\{ (1 - \tau_{W,t}) W_t^m L_t + P_t r_t^K z_t K_{t-1} \right. \\
&\left. + \int_0^1 B_{t-1}(h) dh - \frac{\int_0^1 B_t(h) dh}{\varepsilon_{B,t} R_t} + \int_0^1 \mathcal{D}_{1,t}(h) dh + \int_0^1 \mathcal{D}_{2,t}(h) dh \right\}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

On notera $T_t \equiv \int_0^1 T_t(h) dh$ l'ensemble des taxes (ou subventions) forfaitaires versées aux ménages (la répartition de ces taxes entre les ménages n'est pas déterminée à l'équilibre). On suppose que T_t est ajusté par l'État de façon à équilibrer son budget à chaque date.

2.7 La banque centrale

On suppose que le comportement de la banque centrale peut être caractérisé par la règle de Taylor suivante :

$$R_t = R_{t-1}^{\rho_R} \left[R^* \left(\frac{\pi_{t-1}}{\bar{\pi}} \right)^{r_\pi} \left(\frac{Y_t}{\mathcal{Y}_t} \right)^{r_Y} \left(\frac{\pi_t}{\pi_{t-1}} \right)^{r_{\Delta\pi}} \left(\frac{Y_t/\mathcal{Y}_t}{Y_{t-1}/\mathcal{Y}_{t-1}} \right)^{r_{\Delta Y}} \left(\frac{\varpi_t}{\tilde{\varpi}_t} \right)^{r_\varpi} \right]^{1-\rho_R} \varepsilon_{R,t} \tag{2.11}$$

6. Contre le risque idiosyncrasique lié à la loterie à la [Calvo \(1983\)](#).

7. Car nous souhaitons utiliser une forme suffisamment générale et compatible avec un sentier de croissance équilibré.

où $\bar{\pi}$ est la cible d'inflation de la banque centrale, \mathcal{Y}_t est le niveau de production efficient (celui que nous observerions dans un monde sans rigidités nominales, c'est-à-dire celui que nous observerions en l'absence des rigidités à la Calvo sur les salaires nominaux décidés par les syndicats et sur les prix décidés par les firmes du secteur intermédiaire), ϖ_t est le facteur de croissance du salaire réel, $\tilde{\varpi}_t$ est le facteur de croissance du salaire réel efficient (celui que nous observerions dans un monde sans rigidités nominales) et $\log \varepsilon_{R,t}$ (un processus ARMA stationnaire d'espérance nulle) représente les déviations discrétionnaires de la banque centrale à sa règle. Nous supposons ici que la politique monétaire vise à stabiliser l'inflation autour de sa cible, et à contrôler les inefficiences induites par l'existence de rigidités nominales.

2.8 L'équilibre

À chaque date, les marchés des facteurs et des titres émis par l'État sont équilibrés. L'équilibre sur le marché des biens se traduit par :

$$G_t + C_t + p_{I,t}I_t = \varepsilon_{y,t}Y_t + (\varepsilon_{l,t} - 1)w_t\mathcal{L}_t$$

Notons que si les chocs $\varepsilon_{y,t}$ et $\varepsilon_{l,t}$ s'interprètent comme des taxes (ce n'est pas le cas ici ; ces chocs représentent l'efficacité des firmes et des syndicats à recouvrir leurs recettes) et apparaissent donc comme des revenus dans le budget de l'État, alors le membre de droite se réduit simplement à Y_t et on retrouve l'identité habituelle. L'équilibre est décrit en détail dans l'annexe [A.4](#).

3 Simulation et Estimation d'un modèle DSGE

3.1 Résoudre un modèle DSGE

Le modèle présenté dans la section [2](#) peut se résumer sous la forme d'un système d'équations récurrentes stochastiques⁸. Une particularité de ce système est qu'il fait intervenir des variables endogènes passées, contemporaines et anticipées :

$$\mathbb{E}_t [\mathcal{F}_\theta(y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, \varepsilon_t)] = 0 \tag{3.1}$$

y est un vecteur $n \times 1$ regroupant les variables endogènes du modèle, ε est un vecteur $q \times 1$ aléatoire regroupant les innovations des chocs affectant l'économie, \mathcal{F} est une fonction non linéaire paramétrée par un vecteur de paramètres structurels θ , \mathbb{E}_t est l'opérateur d'espérance conditionnelle à l'information disponible en t . On distingue deux types de modèles selon les hypothèses sur les innovations ε et l'ensemble d'information à la date t .

8. Dès lors que le modèle admet un sentier de croissance équilibré (ce qui est vérifié dans notre cas), il est possible de reparamétriser le modèle en «éliminant» les variables non stationnaires. Techniquement, on remplace chaque variable non stationnaire x_t par $\hat{x}_t \times g_t$, où g_t est le facteur de croissance de cette variable le long du sentier de croissance équilibré. Dans le modèle reparamétrisé il existe un état stationnaire pour toutes les variables du modèle. Dans la suite nous supposons que le modèle est écrit sous forme stationnaire.

Si les innovations futures sont dans l'ensemble d'information à la date t , (3.1) peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{F}_\theta(y_{t+s-1}, y_{t+s}, y_{t+s+1}, \varepsilon_{t+s}) = 0, \text{ pour } s = 0, \dots, T \quad (3.2)$$

avec $\varepsilon_{t+s}, \forall s \geq 0$ connus. Il s'agit d'un modèle à anticipations parfaites. Étant données des conditions initiales pour les variables d'état et des conditions terminales pour les variables non prédéterminées, on cherche une trajectoire $\{y_{t+s}; s = 0, \dots, T - 1\}$ satisfaisant (3.2) pour $s = 0, \dots, T - 1$; il s'agit d'une version discrète d'un système d'équations différentielles avec conditions aux limites de Dirichelet. Nous devons résoudre, par rapport à la trajectoire pour les endogènes y , un système d'équations non linéaires. Laffargue (1990) propose un algorithme de Newton pour résoudre efficacement ce type de problème. Pour la condition terminale, on suppose que l'horizon T est assez grand pour que l'économie soit arbitrairement proche de son état stationnaire. La seule approximation, dans la résolution d'un modèle à anticipation parfaite, est donc de supposer que le niveau terminal des variables non prédéterminées est l'état stationnaire. Les modèles à anticipations parfaites sont utilisés pour mettre en œuvre des variantes, par exemple évaluer l'effet d'une annonce de politique économique (fiscale ou monétaire). Nous verrons un exemple plus loin, en section 5. En adoptant ce type de modélisation, on suppose implicitement que l'incertitude sur la réalisation des innovations futures n'affecte pas le comportement des agents économiques. Ainsi, nous ne pourrions pas expliquer un comportement d'épargne de précaution avec un modèle à anticipations parfaites.

Plus généralement, si les innovations futures sont inconnues à la date t ⁹, nous devons considérer une autre méthode de résolution. En effet, la trajectoire pour les endogènes va être contingente aux réalisations futures des innovations; si nous suivions la même démarche que pour les modèles à anticipations parfaites, nous devrions résoudre une infinité de systèmes d'équations non linéaires. Afin de travailler dans un espace de dimension plus raisonnable, nous allons plutôt chercher à caractériser les propriétés de la distribution des endogènes. Si elle existe, la solution d'un modèle à anticipations rationnelles (3.1) est une équation récurrente stochastique tournée vers le passé :

$$y_t = \mathcal{H}_{\theta, \psi}(y_{t-1}, \varepsilon_t) \quad (3.3)$$

où ψ est un vecteur de paramètres caractérisant les innovations (par exemple les variances et covariances),

9. On suppose tout de même que les agents connaissent la distribution jointe des innovations.

vérifiant¹⁰ :

$$\mathbb{E}_t [\mathcal{F}_\theta(y_{t-1}, \mathcal{H}_{\theta,\psi}(y_{t-1}, \varepsilon_t), \mathcal{H}_{\theta,\psi}(\mathcal{H}_{\theta,\psi}(y_{t-1}, \varepsilon_t), \varepsilon_{t+1}), \varepsilon_t)] = 0 \quad (3.4)$$

La récurrence stochastique (3.3) caractérise les propriétés de la distribution des endogènes du modèle à anticipations rationnelles (3.1). Identifier la fonction \mathcal{H} peut se révéler être un problème complexe; à de rares exceptions près, nous ne disposons pas de solutions analytiques et nous devons recourir à des méthodes numériques. Juillard et Ocaktan (2008) présentent différentes stratégies pour résoudre ce problème (pour une présentation plus détaillée des différentes approches, on peut se reporter à Judd (1998)). Plutôt que d'identifier la fonction (3.3) qui vérifie (3.4), on cherche une fonction $\widehat{\mathcal{H}}_{\theta,\psi}(y_{t-1}, \varepsilon_t)$ qui vérifie une approximation de l'équation fonctionnelle (3.4). La méthode de résolution par perturbation consiste à remplacer (3.4) par une approximation de Taylor à l'ordre k de (3.4) autour de l'état stationnaire déterministe du modèle, $\bar{y}(\theta)$. Si on considère une approximation avec $k = 1$, alors l'équation fonctionnelle approximée est linéaire en y et ε et on montre que la solution pour $\widehat{\mathcal{H}}$ est elle aussi linéaire. On a alors :

$$y_t = \bar{y}(\theta) + \widehat{\mathcal{H}}_\theta^y (y_{t-1} - \bar{y}(\theta)) + \widehat{\mathcal{H}}_\theta^\varepsilon \varepsilon_t \quad (3.5)$$

où $\widehat{\mathcal{H}}_\theta^y$ et $\widehat{\mathcal{H}}_\theta^\varepsilon$ sont respectivement des matrices $n \times n$ et $n \times q$ réelles obtenues à partir de la matrice jacobienne de \mathcal{F}_θ évaluée à l'état stationnaire déterministe. Un résultat remarquable est que les matrices $\widehat{\mathcal{H}}_\theta^y$ et $\widehat{\mathcal{H}}_\theta^\varepsilon$ ne dépendent pas des caractéristiques de l'innovation ε (résumées par le vecteur ψ). La réalisation des innovations affecte les réalisations des endogènes, mais les caractéristiques des innovations n'affectent pas les liens entre y_t et y_{t-1} ou y_t et ε_t . Ce résultat n'est pas surprenant; puisque l'équation fonctionnelle (dont $\widehat{\mathcal{H}}$ est solution) est linéaire, nous vérifions la propriété d'équivalent certain. Avec une approximation à l'ordre un, tout se passe comme si la taille des chocs n'avait pas de conséquence sur les comportements des agents. À nouveau, un modèle à anticipations rationnelles résolu par la méthode de perturbation à l'ordre un n'a, comme les modèles à anticipations parfaites évoqués plus haut, rien à dire sur l'épargne de précaution. Pour pallier cette limite, il faut considérer un ordre supérieur d'approximation de (3.4). Par exemple, on peut montrer que si $k = 2$ alors la nouvelle fonction $\widehat{\mathcal{H}}$ est quadratique en y et ε , et que l'on a :

$$\begin{aligned} y_t = \bar{y}(\theta) + c_{\theta,\psi} + \widehat{\mathcal{H}}_\theta^y \hat{y}_{t-1} + \widehat{\mathcal{H}}_\theta^\varepsilon \varepsilon_t \\ + \widehat{\mathcal{H}}_\theta^{yy} (\hat{y}_{t-1} \otimes \hat{y}_{t-1}) + \widehat{\mathcal{H}}_\theta^{y\varepsilon} (\hat{y}_{t-1} \otimes \varepsilon_t) + \widehat{\mathcal{H}}_\theta^{\varepsilon\varepsilon} (\varepsilon_t \otimes \varepsilon_t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où $\hat{y}_t = y_t - \bar{y}(\theta)$ est le vecteur des endogènes en déviation à l'état stationnaire déterministe, $\widehat{\mathcal{H}}_\theta^{yy}$, $\widehat{\mathcal{H}}_\theta^{y\varepsilon}$ et

10. On obtient cette équation en substituant la solution postulée (3.3) dans (3.1).

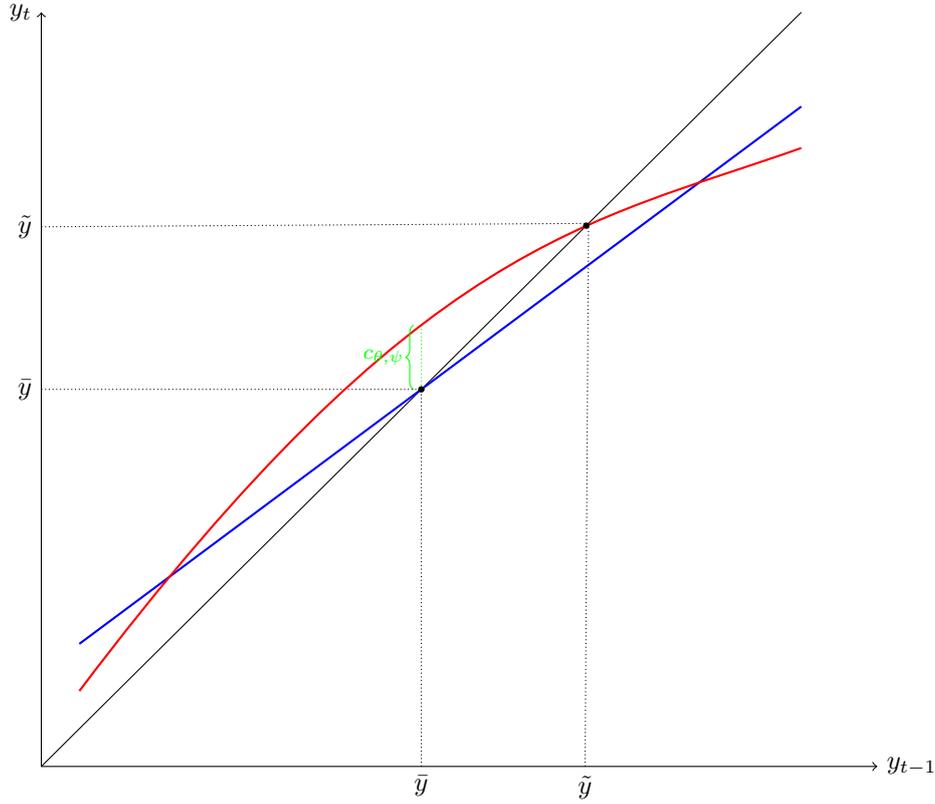


FIGURE 2 – Perturbation aux ordres un et deux.

$\widehat{\mathcal{H}}_{\theta}^{\varepsilon\varepsilon}$ sont respectivement des matrices $n \times nm$, $n \times nq$ et $n \times qq$ réelles, $c_{\theta, \psi}$ est un vecteur $n \times 1$. Les matrices $\widehat{\mathcal{H}}$ et le vecteur $c_{\theta, \psi}$ sont obtenus à partir de calculs d’algèbre linéaire sur le jacobien et le hessien de \mathcal{F}_{θ} évalués à l’état stationnaire déterministe (voir par exemple [Juillard et Ocktan \(2008\)](#)). Cette solution (à l’ordre deux) rend compte de l’effet des propriétés de l’innovation sur le comportement des agents via le terme constant $c_{\theta, \psi}$. Notons que les «élasticités» de y_t à \widehat{y}_{t-1} , $\widehat{y}_{t-1} \otimes \widehat{y}_{t-1}$, $\widehat{y}_{t-1} \otimes \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \otimes \varepsilon_t$ sont toujours indépendantes des propriétés de l’innovation ε . Elles ne seront, par exemple, affectées par la variance de ε que pour un ordre d’approximation strictement supérieur à deux. La figure 2 représente graphiquement, dans le cas où $n = q = 1$ et où l’innovation contemporaine est nulle, les solutions du modèle avec une perturbation à l’ordre un (la droite bleue) et une perturbation à l’ordre deux (la courbe parabolique rouge). Avec une approximation à l’ordre un, si l’économie est en \bar{y} à la date $t - 1$ alors elle demeure en l’état stationnaire déterministe à la date t . L’espérance de la distribution ergodique de y est l’état stationnaire déterministe. Avec une approximation à l’ordre deux du modèle, l’économie ne reste pas en \bar{y} , mais, dans notre illustration graphique, se déplace vers \tilde{y} . Le point fixe associé à l’approximation à l’ordre deux du modèle n’est pas l’état stationnaire déterministe. La différence traduit l’effet à la date t des chocs qui affecteront l’économie en $t + s$ ($s > 0$). Par exemple, si y est le stock de capital physique accumulé par les ménages, nous voyons, avec l’approximation à l’ordre deux, comment les ménages intègrent l’information sur l’incertitude de demain dans leur décision d’épargne aujourd’hui. La différence en \bar{y} entre les courbes bleue et rouge, donnée par $c_{\theta, \psi}$, correspond à un accroissement d’épargne lié à

un motif de précaution. Pour s'assurer contre les chocs futurs, les ménages augmentent le niveau d'épargne au delà de l'état stationnaire déterministe. Ainsi, l'espérance de la distribution ergodique des endogènes, calculée avec une approximation de Taylor à l'ordre deux du modèle (3.4), est différente de l'état stationnaire déterministe.

Pour désigner la solution $\widehat{\mathcal{H}}_{\theta, \psi}$ du modèle, on parle aussi de forme réduite du modèle. À partir de celle-ci on peut calculer des statistiques sur la distribution des endogènes, construire des fonctions de réponses aux chocs structurels ou estimer les paramètres du modèle DSGE.

3.2 Estimer un modèle DSGE

Pour estimer les paramètres $\phi \equiv (\theta, \psi)$, ou un sous ensemble de ce vecteur de paramètres, nous utilisons l'approche bayésienne. Une présentation de cette approche est donnée dans [Adjemian et Pelgrin \(2008\)](#). L'approche bayésienne consiste, en pratique, à modifier la forme de la fonction de vraisemblance du modèle en complétant celle-ci avec des croyances de l'économètre sur les paramètres du modèle. Nous savons, par exemple, que le paramètre α d'une fonction de production Cobb-Douglas (l'élasticité de la production par rapport au capital) est dans l'intervalle $[0,1]$ et nous croyons que ce paramètre se trouve probablement dans un voisinage de $1/3$. On suppose qu'il est possible de formuler cette croyance *a priori* sous la forme d'une fonction de densité de probabilité. Contrairement à l'approche classique de l'inférence, l'approche bayésienne ne raisonne pas conditionnellement à une vraie valeur (inconnue) des paramètres, mais suppose que ceux-ci sont des variables aléatoires et raisonne conditionnellement à l'échantillon pour mettre à jour les croyances sur les paramètres en estimant une densité *a posteriori*. Dans le cas du paramètre α , notre croyance *a priori* sera caractérisée par une distribution (éventuellement asymétrique) centrée sur $1/3$ avec une certaine variance (d'autant plus faible que notre croyance sur la proximité de α à $1/3$ est forte). En utilisant le théorème de Bayes, on montre alors que la densité *a posteriori* des paramètres est proportionnelle au produit de la densité *a priori* et de la vraisemblance. En effet, si on note $p_0(\phi)$ la densité jointe *a priori* sur les paramètres du modèle et $p(\mathcal{Y}_T|\phi) \equiv \mathcal{L}(\phi; \mathcal{Y}_T)$ la densité de l'échantillon conditionnellement au modèle et à ses paramètres (c'est-à-dire la vraisemblance), alors la densité *a posteriori* est donnée par :

$$p_1(\phi|\mathcal{Y}_T) = \frac{p_0(\phi)p(\mathcal{Y}_T|\phi)}{\int p_0(\phi)p(\mathcal{Y}_T|\phi)d\phi} \quad (3.7)$$

Il n'est généralement pas possible, pour un modèle DSGE, d'obtenir une expression analytique de cette densité¹¹. Il faut alors recourir à des méthodes de Monte-Carlo pour estimer la forme de la densité *a posteriori*

11. Voir [Adjemian et Pelgrin \(2008\)](#) pour une application sur les modèles VAR dans un cas où il est possible d'obtenir une expression analytique de la densité *a posteriori*.

(voir [Adjemian et Pelgrin \(2008\)](#) pour une description de ces algorithmes). Dans la suite, pour mettre en œuvre les variantes présentées en section 5, nous utiliserons le mode de la distribution postérieure des paramètres (c'est-à-dire la valeur des paramètres ϕ qui maximise la densité postérieure $p_1(\phi|\mathcal{Y}_T)$). Le mode de la distribution postérieure est estimé en maximisant (avec un algorithme d'optimisation quelconque) le numérateur du membre de droite de l'équation (3.7), appelé le noyau postérieur, car le dénominateur ne dépend pas des paramètres ϕ . Il est possible d'estimer le mode de la densité *a posteriori* sans disposer d'une forme analytique pour la vraisemblance ; il suffit que nous soyons capables de l'évaluer.

L'évaluation de la vraisemblance associée au modèle (réduit) $y_t = \widehat{\mathcal{H}}_{\theta,\psi}(y_{t-1}, \varepsilon_t)$ n'est pas triviale. Même si la fonction $\widehat{\mathcal{H}}_{\theta,\psi}$ est linéaire en y_{t-1} et ε_t , cette évaluation ne peut être directe, comme dans le cas d'un modèle VAR. En effet, la fonction $\widehat{\mathcal{H}}_{\theta,\psi}$ décrit la distribution jointe d'un ensemble de variables qui ne sont pas toutes observées. Afin d'amener le modèle aux données, on doit le réécrire sous une forme état-mesure :

$$y_t^* = Z y_t \quad (3.8a)$$

$$y_t = \widehat{\mathcal{H}}_{\theta,\psi}(y_{t-1}, \varepsilon_t) \quad (3.8b)$$

où y_t^* est un vecteur $m \times 1$, regroupant les variables observées et Z est une matrice de sélection $m \times n$. On peut éventuellement augmenter l'équation de mesure d'un processus stochastique exogène représentant l'inadéquation des variables théoriques avec les variables observées, ou plus simplement une erreur de mesure. On note $\mathcal{Y}_T^* = \{y_t^*\}_{t=1}^T$ l'échantillon à notre disposition et $\phi \in \Phi \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres du modèle état-mesure. La vraisemblance est la densité de l'échantillon, conditionnellement aux paramètres ϕ et au modèle défini par (3.8) :

$$\mathcal{L}(\psi; \mathcal{Y}_T^*) = p(\mathcal{Y}_T^*|\phi) = \prod_{t=1}^T p(y_t^*|\mathcal{Y}_{t-1}^*, \phi) \quad (3.9)$$

L'évaluation de la densité de y_t^* conditionnellement à \mathcal{Y}_{t-1}^* (l'échantillon jusqu'à la date $t - 1$) n'est généralement pas simple, dans la mesure où y_t^* dépend de variables endogènes inobservables. Nous pouvons néanmoins utiliser la relation suivante :

$$p(y_t^*|\mathcal{Y}_{t-1}^*, \phi) = \int_{\Lambda} p(y_t^*|y_t, \phi) p(y_t|\mathcal{Y}_{t-1}^*, \phi) dy_t \quad (3.10)$$

La densité de y_t^* conditionnellement à \mathcal{Y}_{t-1}^* est obtenue comme la moyenne de la densité de y_t^* sachant y_t , pondérée par la densité de y_t sachant \mathcal{Y}_{t-1}^* . La première densité sous l'intégrale est spécifiée par l'équation de

mesure (3.8a). L'évaluation de la densité de la prévision des variables latentes, conditionnellement l'information disponible en $t - 1$, est moins directe, et on doit utiliser un filtre de Kalman. Ce filtre peut être interprété comme une procédure bayésienne récursive d'estimation du vecteur des variables latentes. À chaque date (entre 1 et T) on forme une prévision des variables latentes (y_t sachant \mathcal{Y}_{t-1}^*), en utilisant l'équation d'état (y_t sachant y_{t-1} , équation 3.8b) et une estimation initiale des variables latentes (y_{t-1} sachant \mathcal{Y}_{t-1}^*), puis on corrige cette prévision quand une nouvelle observation (y_t^*) augmente l'ensemble d'information. En initialisant les variables latentes avec la densité associée à leur distribution ergodique, définie par l'équation d'état (3.8b), $p(y_0|\mathcal{Y}_0^*, \phi) = p(y_0|\phi) = p(y_\infty|\phi)$, la récursion s'écrit de la façon suivante :

$$p(y_t|\mathcal{Y}_{t-1}^*, \phi) = \int_{\Lambda} p(y_t|y_{t-1}, \phi) p(y_{t-1}|\mathcal{Y}_{t-1}^*, \phi) dy_{t-1} \quad (3.11a)$$

$$p(y_t|\mathcal{Y}_t^*, \phi) = \frac{p(y_t^*|y_t, \phi) p(y_t|\mathcal{Y}_{t-1}^*, \phi)}{\int_{\Lambda} p(y_t^*|y_t, \phi) p(y_t|\mathcal{Y}_{t-1}^*, \phi) dy_t} \quad (3.11b)$$

L'équation de prédiction (3.11a) nous dit que la densité (prédictive) des variables latentes en t est la moyenne de la densité de y_t sachant y_{t-1} , définie par l'équation d'état (3.8b), pondérée par la densité de y_{t-1} sachant \mathcal{Y}_{t-1}^* . Cette dernière densité est définie par l'équation de mise à jour (3.11b) ou la condition initiale. L'équation de mise à jour (3.11b) est, à l'instar de l'équation (3.7), une application du théorème de Bayes. Le premier terme au numérateur, $p(y_t|\mathcal{Y}_{t-1}^*)$, est la densité *a priori* du vecteur des variables latentes. Le second terme, $p(y_t^*|y_t)$, c'est-à-dire la densité de l'observation sachant l'état obtenu via l'équation de mesure (3.8a), est la vraisemblance. Le dénominateur est la densité marginale de la nouvelle observation.

La vraisemblance du modèle DSGE et donc son noyau postérieur sont évalués en itérant sur le système d'équations (3.11). Ainsi, en toute généralité, l'évaluation du noyau postérieur repose sur des calculs d'intégration. Comme nous devons intégrer sur un espace dont la dimension est égale au nombre de variables endogènes dans le modèle, on voit que l'évaluation de la vraisemblance devient rapidement très coûteuse, voire impossible. C'est pourquoi, dans la suite, nous considérerons une approximation de Taylor à l'ordre un du modèle. Dans ce cas, l'équation d'état (3.8b) est linéaire, et, si on suppose que les innovations sont gaussiennes, il est possible de calculer ces intégrales analytiquement (puisque les variables endogènes sont normalement distribuées). On obtient alors les équations linéaires bien connues du filtre de Kalman (voir par exemple Harvey (1999)).

Toutes ces méthodes de simulation et d'estimation sont implémentées dans le logiciel Dynare (voir Adjemian *et al.* (2010)), qui est utilisé pour les applications qui suivent ¹².

12. Les codes sont disponibles auprès des auteurs.

3.3 Formes réduite et structurelle

L'analyse d'un modèle structurel à anticipations rationnelles (3.1) ou son estimation nécessitent au préalable le calcul de sa forme réduite $y_t = \widehat{\mathcal{H}}_{\theta, \psi}(y_{t-1}, \varepsilon_t)$. Le passage de la forme structurelle à la forme réduite est généralement numérique¹³. Les paramètres de la forme réduite dépendent alors des paramètres de la forme structurelle. Par exemple, dans le cas d'une approximation de Taylor à l'ordre un du modèle de la section 2, on dénombre trente trois variables d'état¹⁴. La forme réduite exprime, par exemple, le niveau de la consommation à la date t en fonction de trente trois variables d'état et des quatorze innovations des variables exogènes. Ainsi, l'équation (réduite) pour la consommation est de la forme :

$$C_t = b(\theta) + \sum_{s=1}^S c_s(\theta) X_{s,t} + \sum_{i=1}^q d_s(\theta) \varepsilon_{i,t} \quad (3.12)$$

où S est le nombre de variables d'état, m est le nombre d'innovations, X_s est une variable d'état et ε_i une innovation. Comme nous l'avons vu dans la section 3.1, les paramètres de la forme réduite ne dépendent que des paramètres structurels (θ) et pas des paramètres définissant les propriétés des innovations (ψ). La forme réduite (3.5) définit une équation du type (3.12) pour chaque variable du modèle à la date t . Puisque les paramètres réduits de ces équations sont tous des fonctions du vecteur du paramètre θ , la forme réduite (3.5) associée à l'approximation du modèle (3.1) définit un ensemble de restrictions, intra et inter équations, sur les paramètres réduits.

Contrairement aux modèles DSGE, les modèles macro-économétriques traditionnels sont directement définis à partir d'une forme réduite. Par exemple, un tel modèle caractérisera la dynamique de la consommation avec une équation de la forme :

$$C_t = b + \sum_{s=1}^S c_s X_{s,t} + \sum_{i=1}^q d_s \varepsilon_{i,t} \quad (3.13)$$

où X_s est une variable explicative de la consommation et ε_i un aléa. La différence essentielle entre les formes réduites (3.12) et (3.13) réside dans la nature des paramètres réduits. Même si les deux formes réduites font intervenir les mêmes variables (ce que, malgré toute vraisemblance, suggèrent les notations adoptées ici), ces deux formes réduites sont très différentes. Une première différence est que dans le second cas il n'existe aucune restrictions inter équations. La seconde différence est liée aux conséquences sur les paramètres réduits

13. Voir [Campbell \(1994\)](#) pour des exemples où le passage de la forme structurelle linéarisée à la forme réduite est analytique.

14. Le nombre de variables d'état peut dépendre de l'ordre d'approximation. Avec une approximation à l'ordre un, les variables de distorsions liées à la variabilité des prix et salaires (décrites dans l'annexe A.4) induites par les lotteries à la [Calvo \(1983\)](#) disparaissent.

d'un changement de politique économique et à la critique de Lucas.

Considérons l'expérience de pensée suivante : à une date T , le gouvernement change le taux de TVA. Dans notre modèle, cela correspond à une variation du niveau de long terme de la variable exogène $\tau_{C,t}$ ($\bar{\tau}_C$, son niveau de long terme, est un paramètre dans le vecteur θ). Ce choc fiscal permanent va affecter la relation fonctionnelle réduite entre la consommation (C_t) et les variables X_s et ϵ_s . Par exemple, suite à cette mesure fiscale, la consommation peut devenir plus ou moins sensible aux variations des revenus des ménages. La forme réduite (3.13) n'a rien à dire sur ce sujet, car elle suppose implicitement que les paramètres réduits sont invariants et en particulier indépendants des choix de politique économique. Cette hypothèse n'est pas tenable au regard de l'intuition. La supériorité de la forme réduite (3.12) est qu'elle nous dit exactement comment une variation de $\bar{\tau}_C$ va se traduire par une variation de la forme fonctionnelle entre la consommation et les variables X_s et ϵ_s , puisque les paramètres réduits dépendent explicitement de θ . Ainsi, les modèles macro-économétriques traditionnels ne sauraient servir à analyser de façon pertinente les conséquences d'un changement de politique économique. Si ces modèles peuvent éventuellement être utiles pour construire des prévisions, ils ne devraient pas être utilisés pour produire des variantes¹⁵.

L'hypothèse des modèles DSGE, est que les paramètres θ dits structurels¹⁶ (sur lesquels reposent les paramètres réduits) sont invariants vis-à-vis d'un changement de politique économique. Cette hypothèse peut paraître raisonnable lorsque l'on pense aux paramètres liés à la spécification des préférences des ménages ou des technologies de production et d'agrégation, mais doit (devrait) être discutée pour d'autres paramètres. En effet, les modèles DSGE ne sont pas toujours exempts de formes réduites ; en particulier, les fondements microéconomiques des rigidités, nominales et réelles, sont souvent faibles voire inexistants. Par exemple, dans notre cas, les rigidités de prix sont introduites via une loterie à la Calvo (1983) et un paramètre ξ_p , la probabilité pour une firme du secteur intermédiaire de ne pas pouvoir optimiser son prix à une date t . Il s'agit d'une forme réduite, et rien n'assure que ce paramètre soit invariant vis-à-vis de toutes les variantes de politique économique. Il est, bien sûr, toujours possible d'adopter des rigidités basées sur des fondations microéconomiques plus solides, mais au prix d'une plus grande complexité du modèle. Il y a donc ici un arbitrage dans les choix de modélisation. Dans ce sens, nous pourrions modéliser la rigidité nominale sur les prix en suivant Dotsey et King (2005) plutôt que Calvo (1983) ; c'est-à-dire, en considérant un modèle où la date à laquelle une firme intermédiaire optimise son prix est endogène et dépend de l'état de l'économie, plutôt qu'un modèle

15. Une autre différence notable est que les modèles macro-économétriques laissent peu de place aux anticipations, ils sont généralement tournés vers le passé. Ainsi ces modèles ne peuvent rien dire sur l'effet anticipé d'un changement politique économique annoncé.

16. On parle aussi, dans la littérature anglo-saxonne, de «*deep parameters*», dans le sens où ils déterminent les paramètres réduits.

où cette date est exogène (décidée par une loterie). La littérature donne assez peu d'éléments convaincants pour conclure sur le statut véritablement structurel des paramètres dits structurels. Il est en fait assez difficile d'appréhender ce problème de façon générale, et on doit raisonner au cas par cas.

4 Estimation du modèle

4.1 Les croyances *a priori*

Les premières colonnes du tableau 2 résument les croyances sur les paramètres du modèle. Certains d'entre eux sont clairement peu identifiables (étant données nos observables), voire non identifiables. Nous préférons néanmoins postuler une croyance *a priori* non dégénérée sur ces paramètres, même si nous savons que la densité *a priori* se reflétera parfaitement dans la densité *a posteriori*. On peut interpréter cette pratique comme une forme d'étalonnage stochastique. Les formes fonctionnelles adoptées pour la dépréciation du capital et le coût d'ajustement de l'investissement sont décrites dans l'annexe D.

Concernant les processus exogènes (les chocs d'efficience, sur les préférences, fiscaux, ...) nous supposons que les chocs sont des AR(1) gaussiens indépendants. Nous définissons les croyances sur l'autocorrélation d'ordre un, sur l'espérance et sur la variance de ces chocs¹⁷. Pour certains chocs (par exemple les chocs fiscaux $1 + \tau_C$, $1 - \tau_W$, $1 + \tau_L$ et $1 - \tau_R$) nous disposons par ailleurs d'informations assez précises que nous exploitons pour définir les *a priori*. Pour les autres chocs (par exemple le choc de *risk premium*) nous suivons la littérature pour fixer les distributions *a priori* (à l'exception du choc sur l'offre de travail dont le niveau de long terme permet d'ajuster le niveau de long terme des heures). Dans tout les cas, nous laissons suffisamment de degrés de liberté à la procédure d'estimation en posant des variances assez importantes (voire infinie sur la taille des variables exogènes).

Pour les *a priori* sur les paramètres structurels, nous suivons généralement la littérature (en particulier les travaux de Smets et Wouters (2003, 2005, 2007)). Plutôt que de poser des croyances *a priori* sur les probabilités de Calvo (1983) (ξ_p et ξ_w), nous définissons nos croyances *a priori* sur la durée moyenne de la période durant laquelle une firme ou un syndicat ne peut optimiser son prix ($1/1-\xi_p$ et $1/1-\xi_w$). Ce choix nous semble plus pertinent dans la mesure où nous disposons de données micro-économiques sur cette durée moyenne (voir par exemple Loupias et Sevestre (2010) ou Fabiani *et al.* (2007)). Les densités *a priori* sur ces durées sont centrées sur 4 trimestres. Les paramètres ϵ_f et ϵ_s caractérisent la courbure des fonctions d'agrégation des biens intermé-

17. Il est plus simple de définir les croyances sur la fonction d'autocovariance d'une variable exogène, plutôt que sur le(s) paramètre(s) autorégressifs et l'innovation de la variable exogène (l'approche habituellement considérée dans la littérature).

diaires et du travail différencié. Nous ne disposons pas d'idées précises sur ce paramètre ; c'est pourquoi les variances *a priori* sont relativement importantes. Leurs densités *a priori* sont centrées sur 10, ce qui correspond aux calibrations souvent retenues dans la littérature (voir [Smets et Wouters \(2007\)](#), [Levin et al. \(2007\)](#)).

En élicitant les densités *a priori*, nous avons vérifié que la masse de probabilité *a priori* effective, c'est-à-dire une fois que nous avons éliminé les configurations de paramètres pour lesquels l'état stationnaire n'existe pas ou pour lesquels les conditions de Blanchard et Kahn ne sont pas vérifiées, est bien unitaire.

4.2 Les données

Le modèle est identifié avec sept séries trimestrielles pour la zone euro extraites d'Eurostat et couvrant la période 1995T2-2008T3. L'échantillon d'estimation exclut volontairement les points correspondant à la crise financière récente. Les séries réelles observées sont divisées par la population dont l'âge est compris entre 15 et 64 ans puisque le modèle ne tient pas explicitement compte de la croissance de la population. La source de cette dernière série est aussi Eurostat. Par ailleurs, dans la mesure où le modèle inclut une tendance stochastique avec dérive de la productivité, les séries réelles intégrées sont observées en taux de croissance sans être préalablement filtrées. Plus précisément, notre base de données comprend les taux de croissance du PIB réel par tête, de la consommation privée réelle par tête, de l'investissement total réel par tête, de la masse salariale réelle par tête, ainsi que, pour les séries stationnaires, le glissement annuel de l'indice des prix à la consommation harmonisé de la zone euro (IPCH), le taux d'utilisation des capacités de production (TUC) et le taux d'intérêt nominal interbancaire à trois mois. L'observation de séries brutes pose cependant un problème dans la mesure où le modèle suppose que la croissance de toutes les variables réelles a pour origine une tendance de productivité exogène commune. Cette hypothèse implique en effet que leur taux de croissance de long terme est identique, ce qui est clairement rejeté par les données sur notre période d'estimation (voir graphiques en annexe). Pour y remédier, les équations de mesure des variables concernées (consommation, investissement et masse salariale par tête) comprennent un terme d'erreur constant correspondant à la différence entre leur taux de croissance moyen observé et celui du PIB par tête. Les hypothèses faites sur le degré d'intégration des séries observées sont vérifiées à l'aide de tests standard de racine unitaire. Le tableau 4 en annexe E donne les résultats ainsi qu'une brève description des tests.

On utilise pour l'estimation, en plus des séries trimestrielles citées ci-dessus, une série d'heures travaillées. Celle-ci est fournie par Eurostat en fréquence annuelle et seulement à partir de l'année 2000. Les observations manquantes sont traitées comme des variables latentes dans le modèle état mesure (3.8). Techniquement, on

considère un filtre de Kalman où le nombre de lignes dans la matrice de sélection Z n'est pas constant. Les détails sont donnés dans [Adjemian et Devulder \(2010\)](#).

4.3 Les croyances *a posteriori*

Les dernières colonnes du tableau 2 donnent les résultats pour l'estimation du mode et de la variance de la distribution postérieure. Le mode de la densité postérieure est obtenu à l'aide d'une routine d'optimisation et la variance postérieure est approximée par l'inverse de l'opposé de la matrice hessienne du noyau postérieur évalué au mode. Cette approximation n'est valable que si la distribution postérieure est assez proche d'une gaussienne. Notons que nous nous sommes contentés d'une estimation du mode, mais nous aurions pu estimer la distribution postérieure dans son ensemble à l'aide d'un Monte-Carlo (voir [Adjemian et Pelgrin \(2008\)](#)). L'estimation ici ne nous sert qu'à sélectionner des valeurs pour les paramètres, afin de mettre en œuvre des expériences sur la politique monétaire dans la section suivante.

On remarque que la durée moyenne des contrats de prix des biens intermédiaires est très faible (1,3 trimestres) contrairement à la durée moyenne des contrats de salaire (5,3 trimestres). Le *mark-up* à l'état stationnaire (μ_f) des firmes du secteur intermédiaire est plus faible (1,26) que la marge des syndicats ($\mu_s = 1,43$). La courbure de la fonction d'agrégation des firmes du secteur du bien final apparaît plus faible (8,18) que celle de l'agence d'emploi (10,75). Dans l'ensemble, selon notre estimation, les prix sont moins rigides que les salaires. On remarque aussi que l'inflation des prix est moins persistante que l'inflation des salaires ($\gamma_p = 1,12 < 0,28 = \gamma_w$).

5 Variantes de politique monétaire

Dans cette section nous proposons deux exercices afin d'illustrer l'intérêt de la modélisation DSGE. Les questions abordées ici ne pourraient être traitées en dehors d'un modèle structurel.

5.1 Coût des fluctuations et forme de la règle de Taylor

Nous évaluons l'efficacité de la politique monétaire, en quantifiant dans quelle mesure elle parvient utilement à stabiliser les fluctuations agrégées¹⁸. Nous évaluons le coût en bien être conditionnel des fluctuations en suivant [Schmitt-Grohe et Uribe \(2004\)](#). Ces auteurs montrent que le coût en bien être (la variable \mathcal{W}_t définie dans l'équation (2.1)) à la date t , sachant que l'économie est à l'état stationnaire déterministe à la date $t - 1$, peut être approximé à l'aide de la correction sur la constante dans la forme réduite d'une approximation à l'ordre

18. Le coût des fluctuations idiosyncrasiques, liées aux loteries à la [Calvo \(1983\)](#), n'est pas pris en compte.

deux du modèle DSGE (le terme $c_{\theta,\psi}$ dans la forme réduite (3.6)). On peut donner l'intuition de ce résultat en considérant la figure 2. Si l'économie est initialement à l'état stationnaire non stochastique ($y_{t-1} = \bar{y}$), nous avons vu qu'une itération sur la forme réduite (3.6) va déplacer l'économie hors de l'état stationnaire déterministe ($y_t = y_{t-1} + c_{\theta,\psi} \neq \bar{y}$), même en l'absence de chocs en t , à cause de l'anticipation par les agents des chocs agrégés qui frapperont l'économie demain (en $t + s$, pour $s > 0$). Face aux réalisations incertaines des chocs futurs, les agents s'assurent en accumulant plus de capital, c'est à dire en consommant moins aujourd'hui (et demain) ce qui entraîne une dégradation du bien être. Nous observerons donc un saut vers le haut de l'investissement en t mais une chute vers le bas du bien être, dont la mesure est donnée par l'élément du vecteur $c_{\theta,\psi}$ correspondant à la variable \mathcal{W} . Comme le bien être est une variable tournée vers le futur, dans le sens où $\mathcal{W}_t = u_t + \mathbb{E}[\beta \mathcal{W}_{t+1}]$, le saut initial rend compte du coût en bien être aujourd'hui et demain (la transition vers le point fixe associé à forme réduite (3.6), $\tilde{\mathcal{W}}$). Une telle évaluation du bien être est contingente à une transformation croissante arbitraire de la fonction d'utilité. Afin d'obtenir une mesure plus lisible il est d'usage d'exprimer la perte en bien-être en son équivalent en consommation. On cherche alors à exprimer le niveau de consommation qu'un consommateur serait prêt à sacrifier en échange de l'élimination des fluctuations agrégées. Ce sacrifice est exprimé en pourcentage du niveau de long terme de la consommation.

Le tableau 3 donne l'évaluation, en termes de pourcentage de la consommation à l'état stationnaire déterministe, du coût des fluctuations, pour différentes spécifications de la politique monétaire (de la règle de Taylor (2.11)). Dans le premier cas, on considère la règle de Taylor estimée. Le coût des fluctuations est de l'ordre de -0,41%. Cette évaluation, qui peut paraître faible, est sensiblement plus importante que les chiffres reportés par Lucas (2003, 1987) (de l'ordre de un vingtième de pourcentage)¹⁹. Au delà de cette évaluation, il peut être plus intéressant de comprendre comment la politique de la banque centrale affecte le coût en bien être des fluctuations. Les quatre lignes suivantes du tableau décrivent comment varie le coût des fluctuations si on retire une (des) variable(s) de la règle de Taylor. On observe que, généralement, cela ne change pas sensiblement les évaluations du coût des fluctuations, sauf dans le cas où la banque centrale ne réagit pas à l'écart de production. Dans ce cas, le coût en bien-être des fluctuations est plus important. L'écart de production, dans un monde imparfait où les firmes ne peuvent pas ajuster librement les prix, est souvent vu comme un indicateur avancé de l'inflation. En ne réagissant pas aux variations de l'écart de production, la banque centrale contrôle moins efficacement l'inflation, ce qui engendre *in fine* un coût pour les ménages.

19. Cette différence peut d'abord s'expliquer par l'approche moins structurelle de Lucas. Celui-ci ne raisonne que sur la base d'un processus exogène pour la consommation et d'une fonction d'utilité. Ici nous proposons une évaluation du coût des fluctuations dans un modèle d'équilibre général stochastique où les inefficiences sont nombreuses (marges variables des firmes intermédiaires et des syndicats, externalité liée aux habitudes de consommation,...).

La règle de Taylor estimée rend compte de la politique monétaire effective. Nous pourrions nous demander si l'autorité monétaire n'aurait pas pu faire mieux en termes de maîtrise des fluctuations. La réponse est positive. En supposant que le but assigné à la banque centrale soit le contrôle de la volatilité de l'inflation, nous cherchons les paramètres $\rho_R, r_\pi, r_Y, r_{\Delta\pi}, r_{\Delta Y}$ et r_ϖ qui minimisent la variance (ergodique) de l'inflation. L'avant dernière ligne du tableau 3 reporte un coût des fluctuations de l'ordre de -0,28%, sensiblement moindre que dans le cas de la règle de Taylor. On parvient encore à réduire ce coût si on demande à l'autorité monétaire de pénaliser simultanément la volatilité du taux d'intérêt nominal (la dernière ligne du tableau). D'après notre estimation du modèle, l'autorité monétaire pourrait stabiliser plus efficacement l'inflation, ce qui amènerait des gains en bien être pour les ménages.

Scénario	Équivalent consommation
Règle de Taylor	-0.4112%
Règle de Taylor \ \ $\{i_{t-1}\}$	-0.3004%
Règle de Taylor \ \ $\{\frac{\varpi_t}{\varpi_t}\}$	-0.4101%
Règle de Taylor \ \ $\{\Delta\pi_t, \Delta\frac{Y_t}{\varpi_t}\}$	-0.4109%
Règle de Taylor \ \ $\{\frac{Y_t}{\varpi_t}, \Delta\frac{Y_t}{\varpi_t}\}$	-1.1333%
Règle de Taylor optimisée A	-0.2790%
Règle de Taylor optimisée B	-0.2635%

TABLE 1 – **Coût des fluctuations.** La règle de Taylor optimisée A correspond à l'équation (2.11) où les coefficients sont choisis pour minimiser la volatilité de l'inflation (l'objectif est $\mathbb{V}[\pi_t]$). La règle de Taylor optimisée B correspond à la même équation où les coefficients sont choisis pour minimiser la volatilité de l'inflation et la volatilité du taux d'intérêt nominal (l'objectif est $\mathbb{V}[\pi_t] + 0.1\mathbb{V}[i_t]$).

5.2 Faut-il annoncer une politique monétaire accommodante ?

Cette section propose une variante illustrant l'utilisation du modèle présenté pour l'évaluation de la politique monétaire. On suppose que l'économie de la zone euro est frappée par un choc de productivité négatif entraînant un ralentissement de l'économie ainsi qu'une augmentation du coût unitaire du travail et donc de l'inflation. La banque centrale envisage alors de mener temporairement une politique monétaire accommodante. Cette situation peut apparaître dans le contexte d'une économie fragilisée par la crise financière : l'autorité monétaire est tentée de répondre à des tensions inflationnistes exogènes, telles qu'une hausse du prix du pétrole, par des hausses de taux d'intérêt plus faibles que d'ordinaire. On se demande alors, d'une part, quels sont les effets d'une telle politique et, d'autre part, ce qu'il advient si celle-ci est préalablement annoncée et crédible (ou, en d'autres termes, si elle est parfaitement anticipée).

On considère que le choc de productivité négatif qui frappe l'économie en première période a une amplitude d'un écart-type. La politique accommodante de la banque centrale est modélisée par une chronique de 6 innovations négatives sur le choc de la règle de Taylor du modèle, chacune d'amplitude égale à 10% de son écart-type et survenant entre la première et la sixième période. On suppose donc que la durée de cette politique est d'un an et demi. Les graphiques suivants présentent les réponses des principales variables macroéconomiques dans trois cas : lorsque la banque centrale répond « normalement » au choc technologique, c'est-à-dire en suivant la règle de Taylor, lorsqu'elle mène une politique accommodante sans l'annoncer et, enfin, lorsqu'elle mène la même politique mais en l'annonçant dès la première période :

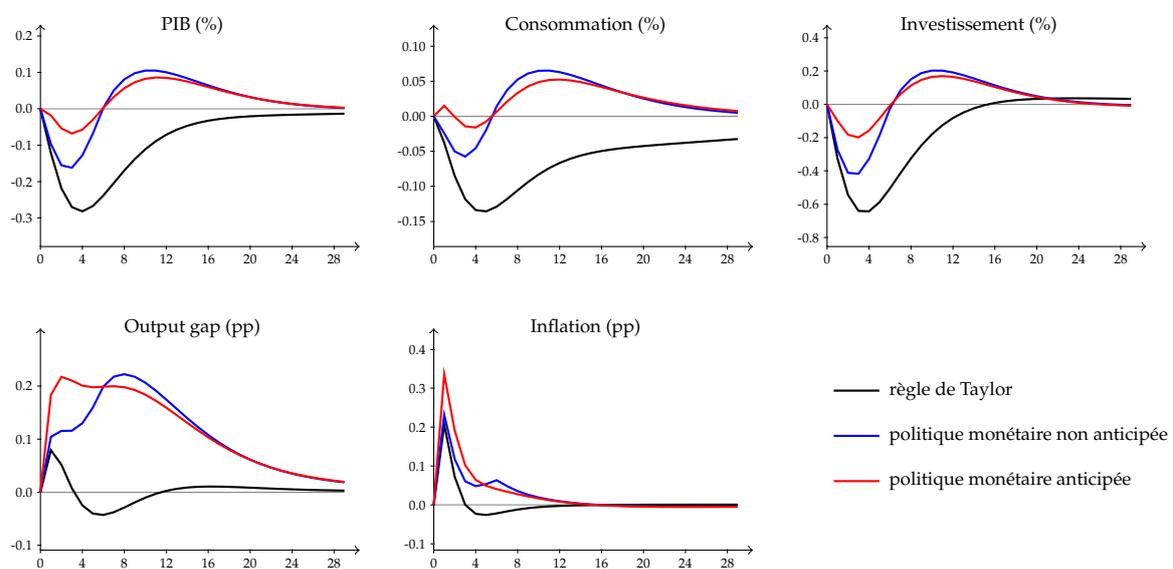


FIGURE 3 – Variantes sur la politique monétaire.

La politique monétaire accommodante a pour effet, qu'elle soit annoncée ou pas, d'atténuer sensiblement l'impact du choc technologique sur l'activité. En revanche, elle amplifie ses effets inflationnistes. D'une part, les chocs de Taylor négatifs diminuent la rémunération des titres d'État et incitent les ménages à transférer leur épargne vers l'investissement en capital productif. D'autre part, ils poussent à la baisse le taux d'épargne des ménages puisque le fait de renoncer à une certaine quantité de consommation pendant la période présente leur permet de bénéficier, grâce aux intérêts dégagés, d'une quantité de consommation aux dates futures moindre qu'en l'absence de ces chocs. Autrement dit, ils augmentent les prix relatifs de la consommation aux dates futures par rapport au prix présent, d'où un effet de substitution intertemporelle au profit de la consommation présente. Ainsi, la hausse de la demande relance l'activité et les ménages bénéficient d'un surcroît de revenu pendant et après la période pendant laquelle la politique monétaire est accommodante. Au total, l'effet sur la demande est positif sur tout l'horizon de simulation, d'où davantage de tensions sur le marché des biens. Les

entreprises réagissent en révisant progressivement leurs prix à la hausse, ajoutant à l'inflation provoquée par le choc technologique.

Lorsque la politique monétaire accommodante est anticipée, les ménages effectuent en période 1 le même arbitrage que dans le cas de chocs de Taylor non anticipés, c'est-à-dire qu'ils augmentent immédiatement leur consommation et leur investissement en capital productif, mais, de plus, ils prennent en compte le fait qu'ils auraient à arbitrer de la même façon pendant chacune des 5 périodes suivantes. Autrement dit, dès la période 1, ils choisissent leur demande pendant toutes les périodes futures en considérant l'effet cumulé de la politique monétaire accommodante : désireux de lisser leur profil intertemporel de consommation, ils substituent de la consommation présente à de la consommation future dans des proportions plus importantes que dans le cas où les chocs futurs ne sont pas anticipés. De même, ils choisissent immédiatement d'investir davantage afin de limiter les variations, coûteuses, de l'investissement. L'effet positif sur l'activité de la politique monétaire accommodante est donc amplifié, d'où un accroissement des tensions inflationnistes. Celles-ci sont d'autant plus fortes que les entreprises anticipent elles-mêmes parfaitement les effets des chocs de Taylor futurs ; n'étant autorisées à réviser leurs prix à chaque date qu'avec une probabilité $1 - \xi_p$, elles répercutent sur l'inflation l'effet des tensions futures sur le marché des biens dès qu'elles ont l'opportunité de le faire. Dans cette variante, le *welfare*, exprimé en équivalent de consommation, diminue de 0.014% en période 1 contre 0.007% dans le cas où le taux d'intérêt réagit suivant la règle de Taylor du modèle. La politique monétaire accommodante, malgré son effet positif sur l'activité, n'est donc pas préférable du point de vue du bien-être des ménages. En effet, les chocs négatifs sur le taux d'intérêt, en diminuant la rémunération de l'épargne, affectent négativement leur richesse intertemporelle.

En résumé, une politique monétaire accommodante pendant une durée limitée est efficace pour atténuer l'effet sur l'activité d'un choc de productivité négatif. L'apparition de tensions inflationnistes est alors inévitable. Si elle souhaite limiter l'ampleur de ces dernières, la banque centrale a intérêt à ne pas annoncer la politique monétaire envisagée.

	Croyances <i>a priori</i>			Croyances <i>a posteriori</i>	
	Distribution	Mode	Écart-type	Mode	Écart-type
$\sigma[A_T]$	Inverse gamma	0.004	∞	0.0030	0.0007
$\sigma[A_C]$	Inverse gamma	0.010	∞	0.0092	0.0018
$\sigma[\tau_C]$	Inverse gamma	0.004	∞	0.0196	0.0043
$\sigma[\tau_W]$	Inverse gamma	0.011	∞	0.0108	0.0041
$\sigma[\tau_R]$	Inverse gamma	0.005	∞	0.0324	0.0053
$\sigma[\varepsilon_L]$	Inverse gamma	0.010	∞	0.0095	0.0035
$\sigma[p_I]$	Inverse gamma	0.005	∞	0.0048	0.0016
$\sigma[\varepsilon_I]$	Inverse gamma	0.010	∞	0.0115	0.0052
$\sigma[\varepsilon_B]$	Inverse gamma	0.010	∞	0.0063	0.0010
$\sigma[\tau_L]$	Inverse gamma	0.003	∞	0.0082	0.0016
$\sigma[\varepsilon_y]$	Inverse gamma	0.005	∞	0.0034	0.0009
$\sigma[\varepsilon_I]$	Inverse gamma	0.005	∞	0.0042	0.0014
$\sigma[\varepsilon_R]$	Inverse gamma	0.005	∞	0.0019	0.0003
$\sigma[\varepsilon_g]$	Inverse gamma	0.021	∞	0.0273	0.0117
$\rho_{A_T}(1)$	Béta	0.464	0.2236	0.6344	0.2032
$\rho_{A_C}(1)$	Béta	0.500	0.2236	0.7958	0.0775
$\rho_{\tau_C}(1)$	Béta	0.910	0.2236	0.1468	0.1146
$\rho_{\tau_W}(1)$	Béta	0.958	0.2236	0.9707	0.1806
$\rho_{\tau_R}(1)$	Béta	0.909	0.2236	0.8611	0.0494
$\rho_{\varepsilon_B}(1)$	Béta	0.500	0.2236	0.5293	0.1320
$\rho_{\varepsilon_L}(1)$	Béta	0.500	0.2236	0.5182	0.3693
$\rho_{p_I}(1)$	Béta	0.918	0.2236	0.6445	0.2375
$\rho_{\varepsilon_I}(1)$	Béta	0.500	0.2236	0.2250	0.2294
$\rho_{\tau_L}(1)$	Béta	0.750	0.2236	0.7902	0.0873
$\rho_{\varepsilon_y}(1)$	Béta	0.500	0.2236	0.9225	0.0604
$\rho_{\varepsilon_I}(1)$	Béta	0.500	0.2236	0.8838	0.1084
$\rho_{\varepsilon_R}(1)$	Béta	0.500	0.2236	0.8309	0.0433
$\rho_{\varepsilon_g}(1)$	Béta	0.855	0.2236	0.9624	0.0349
$\rho_{\bar{\pi}}(1)$	Béta	0.855	0.2236	0.8545	0.2852
Écart sur ΔC	Gaussienne	-0.049	0.0200	-0.0429	0.0143
Écart sur ΔI	Gaussienne	0.177	0.0200	0.1813	0.0186
Écart sur ΔW	Gaussienne	-0.121	0.0200	-0.1173	0.0127
σ_c	Gaussienne	1.200	0.0500	1.1972	0.0489
σ_l	Gaussienne	2.000	0.3000	2.1554	0.2823
η	Béta	0.560	0.1400	0.8108	0.0376
$\frac{1}{1-\xi_p}$	Gamma	4.000	1.0000	1.3081	0.0890
$\frac{1}{1-\xi_w}$	Gamma	4.000	1.0000	5.2934	1.0512
μ_f	Gamma	1.200	0.0500	1.2557	0.0483
μ_s	Gamma	1.200	0.2000	1.4291	0.2167
γ_p	Béta	0.290	0.1000	0.1214	0.0556
γ_w	Béta	0.300	0.1000	0.2778	0.0972
ε_f	Gamma	10.000	2.0000	8.1847	1.6488
ε_s	Gamma	10.000	2.0000	10.7530	2.0334
$\frac{wL}{Y}$	Béta	0.391	0.0030	0.3919	0.0030
δ	Béta	0.020	0.0500	0.0358	0.0166
ρ_R	Béta	0.830	0.0500	0.8160	0.0270
r_π	Gaussienne	1.485	0.0800	1.4813	0.0798
r_y	Gaussienne	0.350	0.0500	0.3893	0.0473
$r_{\Delta\pi}$	Gaussienne	0.000	0.5000	0.7458	0.2230
$r_{\Delta y}$	Gaussienne	0.700	0.3000	0.6206	0.2751
r_w	Gaussienne	0.000	0.5000	-0.1737	0.2653
\bar{A}_T	Béta	0.004	0.0020	0.0040	0.0007
$\bar{\pi}$	Béta	1.005	0.0040	1.0054	0.0013
$\bar{\tau}_C$	Béta	1.111	0.0500	1.1099	0.0483
$\bar{\tau}_R$	Béta	0.881	0.0500	0.8562	0.0554
$\bar{\tau}_W$	Béta	0.877	0.0500	0.8780	0.0486
$\bar{\tau}_L$	Béta	1.285	0.0200	1.2972	0.0202
$\bar{\varepsilon}_g$	Béta	0.217	0.0400	0.2037	0.0353
ψ	Gamma	2.000	0.5000	2.4754	0.4058
\bar{z}	Gaussienne	0.821	0.0500	0.8209	0.0068
\bar{L}	Gaussienne	0.271	0.1000	0.2696	0.0033
\bar{r}	Béta	1.003	0.0020	1.0032	0.0011

TABLE 2 – Croyances *a priori* et *a posteriori*.

Références

- Stéphane ADJEMIAN, Houtan BASTANI, Michel JUILLARD, Ferhat MIHOUBI, George PERENDIA, Marco RATTO et Sébastien VILLEMOT : *Dynare manual 4.1.3*, October 2010. URL www.dynare.org.
- Stéphane ADJEMIAN et Antoine DEVULDER : Improving the forecasting performance of a bayesian dsge model for the euro area using missing observations series, 2010.
- Stéphane ADJEMIAN et Florian PELGRIN : Un regard bayésien sur les modèles dynamiques de la macroéconomie. *Économie et Prévision*, 183-184:127–152, 2008.
- Susanto BASU et Miles S. KIMBALL : Long run labor supply and the elasticity of intertemporal substitution for consumption. mimeo, University of Michigan, October 2002.
- Guillermo A. CALVO : Staggered prices in a utility-maximizing framework. *Journal of Monetary Economics*, 12 (3):383–398, September 1983.
- John Y. CAMPBELL : Inspecting the mechanism : An analytical approach to the stochastic growth model. *Journal of Monetary Economics*, 33(3):463–506, Juin 1994.
- L. CHRISTIANO, M. EICHENBAUM et C. EVANS : Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy. *Journal of Political Economy*, 113(1):1–45, 2005.
- A. DIXIT et J. STIGLITZ : Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *American Economic Review*, 67(3):297–308, 1977.
- Michael DOTSEY et Robert G. KING : Implications of state-dependent pricing for dynamic macroeconomic models. Working Papers 05-2, Federal Reserve Bank of Philadelphia, February 2005.
- Graham ELLIOTT, Thomas J ROTHENBERG et James H STOCK : Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica*, 64(4):813–36, July 1996.
- C. ERCEG, D. HENDERSON et A. LEVIN : Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts. *Journal of Monetary Economics*, 46(2):281–313, 2000.
- Silvia FABIANI, Claire LOUPIAS, Fernando MARTINS et Roberto SABBATINI : *Pricing Decisions in the Euro Area*. Oxford University Press, 2007.
- Andrew C. HARVEY : *Forecasting, Structural Time Series and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, 1999.

- Kenneth L. JUDD : *Numerical methods in Economics*. MIT press, 1998.
- Michel JUILLARD et Tarik OCAKTAN : Méthodes de simulation des modèles stochastiques d'équilibre général. *Économie et Prévision*, 183-184:115–126, 2008.
- Miles S. KIMBALL : The quantitative analytics of the basic neomonetarist model. NBER Working Papers 5046, National Bureau of Economic Research, March 1996.
- Denis KWIATKOWSKI, Peter C.B. PHILLIPS, Peter SCHMIDT et Yongcheol SHIN : Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root : How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, 54(1-3):159–178, 1992.
- Jean-Pierre LAFFARGUE : Résolution d'un modèle macroéconomique avec anticipations rationnelles. *Annales d'Économie et de Statistique*, 17:97–119, 1990.
- Andrew T. LEVIN, J. David LOPEZ-SALIDO et Tack YUN : Strategic complementarities and optimal monetary policy. Kiel Working Papers 1355, Kiel Institute for the World Economy, June 2007.
- Claire LOUPIAS et Patrick SEVESTRE : Costs, demand, and producer price changes. Working Papers 1211, European Central Bank, 2010.
- Robert E. LUCAS : *Models of Business Cycles*. Blackwell Publishers, 1987.
- Robert E. LUCAS : Macroeconomic priorities. *American Economic Review*, 93(1):1–14, March 2003.
- Peter SCHMIDT et Peter C.B. PHILLIPS : LM tests for a unit root in the presence of deterministic trends. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54(3):257–87, August 1992.
- Stephanie SCHMITT-GROHE et Martin URIBE : Optimal operational monetary policy in the Christiano-Eichenbaum-Evans model of the u.s. business cycle. NBER Working Papers 10724, National Bureau of Economic Research, septembre 2004.
- Christopher SIMS : The role of models and probabilities in the monetary policy process. *Brookings Papers on Economic Activity*, pages 1–62, February 2002.
- Frank SMETS et Rafael WOUTERS : An estimated dynamics stochastic general equilibrium model of the euro area. *Journal of the European Economic Association*, 1:1123–1175, 2003.
- Frank SMETS et Rafael WOUTERS : Comparing shocks and frictions in us and euro area business cycles : A bayesian approach. *Journal of the European Economic Association*, 20:161–183, 2005.

Frank SMETS et Rafael WOUTERS : Shocks and frictions in us business cycles : A bayesian dsge approach.

American Economic Review, 97(3):586–606, June 2007.

Annexes

A Équations du modèle

A.1 Les ménages

Les conditions du premier ordre associées au programme d'un consommateur h sont données par :

$$(C_t(h) - \eta \bar{C}_{t-1})^{-\sigma_c} \exp \left\{ \varepsilon_{L,t} \frac{\sigma_c - 1}{1 + \sigma_l} L_t(h)^{1 + \sigma_l} \right\} = (1 + \tau_{C,t}) \lambda_t(h) \quad (\star)$$

où $\lambda_t(h)$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire réelle,

$$(1 - \tau_{R,t}) \lambda_t(h) = \beta \varepsilon_{B,t} R_t \mathbb{E}_t \left[\frac{(1 - \tau_{R,t+1}) \lambda_{t+1}(h)}{\pi_{t+1}} \right]$$

où $\pi_{t+1} \equiv P_{t+1}/P_t$ est le taux d'inflation entre t et $t + 1$,

$$u_t(h) (\sigma_c - 1) \varepsilon_{L,t} L_t(h)^{\sigma_l} = -\lambda_t(h) (1 - \tau_{R,t}) (1 - \tau_{W,t}) \frac{W_t^m}{P_t} \quad (\star\star)$$

en notant $\mu_t(h)$ le multiplicateur associé à la loi d'évolution du stock de capital, il vient :

$$\begin{aligned} p_{I,t} \lambda_t(h) &= \mu_t(h) \varepsilon_{I,t} \left[1 - S \left(\frac{I_t(h)}{I_{t-1}(h)} \right) - \frac{I_t(h)}{I_{t-1}(h)} S' \left(\frac{I_t(h)}{I_{t-1}(h)} \right) \right] \\ &+ \beta \mathbb{E}_t \left[\mu_{t+1}(h) \varepsilon_{I,t+1} \left(\frac{I_{t+1}(h)}{I_t(h)} \right)^2 S' \left(\frac{I_{t+1}(h)}{I_t(h)} \right) \right] \\ \mu_t(h) \delta' (z_t(h)) &= \lambda_t(h) (1 - \tau_{R,t}) r_t^k \end{aligned}$$

et enfin :

$$\mu_t(h) = \beta \mathbb{E}_t \left[\mu_{t+1}(h) (1 - \delta(z_{t+1}(h))) + \lambda_{t+1}(h) (1 - \tau_{R,t+1}) r_{t+1}^k z_{t+1}(h) \right]$$

Puisque les conditions (\star) et $(\star\star)$ doivent être vérifiées pour toutes les valeurs (pertinentes) des paramètres (η , σ_c et σ_l), des variables d'état (la consommation moyenne passée et les taxes) et des prix (le salaire réel), les niveaux de consommation et d'offre de travail sont invariants dans la coupe des ménages. Cela entraîne l'invariance dans la coupe des multiplicateurs de Lagrange. Finalement on a :

$$(C_t - \eta C_{t-1})^{-\sigma_c} \exp \left\{ \varepsilon_{L,t} \frac{\sigma_c - 1}{1 + \sigma_l} L_t^{1 + \sigma_l} \right\} = (1 + \tau_{C,t}) \lambda_t \quad (\text{A.1})$$

$$(1 - \tau_{R,t}) \lambda_t = \beta \varepsilon_{B,t} R_t \mathbb{E}_t \left[\frac{(1 - \tau_{R,t+1}) \lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$u_t \varepsilon_{L,t} (\sigma_c - 1) L_t^{\sigma_l} = -\lambda_t (1 - \tau_{R,t}) (1 - \tau_{W,t}) \frac{W_t^m}{P_t} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{p_{I,t}}{\varepsilon_{I,t}} = Q_t \left[1 - S \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - \frac{I_t}{I_{t-1}} S' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} Q_{t+1} \frac{\varepsilon_{I,t+1}}{\varepsilon_{I,t}} \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 S' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$Q_t \delta' (z_t) = (1 - \tau_{R,t}) r_t^k \quad (\text{A.5})$$

$$Q_t = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \left(Q_{t+1} (1 - \delta(z_{t+1})) + (1 - \tau_{R,t+1}) r_{t+1}^k z_{t+1} \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

En notant $Q_t \equiv \mu_t/\lambda_t$ le Q de Tobin. Notons que dans (A.1) nous avons pu remplacer \bar{C}_{t-1} par C_{t-1} car les ménages sont identiques.

A.2 Les producteurs et dynamique de l'inflation

A.2.1 Le secteur du bien homogène

Puisque que la fonction d'agrégation (2.5) est homogène de degré un, la maximisation du profit revient à minimiser le coût par unité produite par rapport à la demande relative de bien ι sous la contrainte technologique (2.4) et (2.5). La condition du premier ordre associée au programme de la firme représentative détermine sa demande en bien intermédiaire ι :

$$\frac{Y_t(\iota)}{Y_t} = \frac{1}{1 + \psi_f} \left[\left(\frac{P_t(\iota)/P_t}{\Theta_t} \right)^{-(1 + \psi_f)\theta_f} + \psi_f \right] \quad (\text{A.7})$$

où Θ_t est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte technologique (2.4) et (2.5) de la firme représentative. En substituant (A.7) dans la contrainte technologique on obtient l'expression suivante du multiplicateur de Lagrange :

$$\Theta_t = \left(\int_0^1 \left(\frac{P_t(\iota)}{P_t} \right)^{1 - \theta_f(1 + \psi_f)} d\iota \right)^{\frac{1}{1 - \theta_f(1 + \psi_f)}} \quad (\text{A.8})$$

Finalement, puisque ce secteur est parfaitement concurrentiel, le profit de la firme représentative doit être nul et nous déduisons l'indice des prix agrégés :

$$P_t = \frac{\psi_f}{1 + \psi_f} \int_0^1 P_t(\iota) d\iota + \frac{1}{1 + \psi_f} \left(\int_0^1 P_t(\iota)^{1 - (1 + \psi_f)\theta_f} d\iota \right)^{\frac{1}{1 - (1 + \psi_f)\theta_f}} \quad (\text{A.9})$$

Le prix agrégé est un mélange convexe d'un agrégateur linéaire et d'un agrégateur CES.

A.2.2 Le secteur des biens intermédiaires

Le comportement optimal de la firme intermédiaire ι sur les marchés des facteurs est résumé par la frontière des prix des facteurs :

$$\frac{(1 + \tau_{L,t})w_t L_t^d(\iota)}{r_t^k K_t^d(\iota)} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (\text{A.10})$$

La frontière des prix des facteurs nous permet de réécrire le coût total d'une firme ι en fonction du stock de capital physique :

$$CT_t(\iota) = \frac{r_t^k K_t^d(\iota)}{\alpha}$$

Par ailleurs, puisque les rendements par rapport aux deux facteurs de production sont constants, nous savons que le coût total est de la forme :

$$CT_t(\iota) = mc_t(\iota)Y_t(\iota)$$

où $mc_t(\iota)$ est le coût marginal réel. En égalisant les membres de droite des deux dernières équations, on obtient l'expression suivante pour le coût marginal de la firme ι :

$$mc_t(\iota) = A_t^{\alpha-1} \left(\frac{r_t^k}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{(1 + \tau_{L,t})w_t}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \equiv mc_t \quad (\text{A.11})$$

Puisque le coût marginal ne dépend pas de la taille de la firme, il est invariant dans la coupe des firmes.

Avec probabilité $\xi_p > 0$ la firme ι ne peut optimiser son prix et elle suit la règle *ad-hoc* :

$$P_t(\iota) = \bar{\pi}^{1-\gamma_p} \left[\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right]^{\gamma_p} P_{t-1}(\iota) = \Gamma_t P_{t-1}(\iota) \quad (\text{A.12})$$

Plus généralement on notera :

$$\Gamma_{t+j,t} = \bar{\pi}^{j(1-\gamma_p)} \left(\prod_{h=0}^{j-1} \pi_{t+h} \right)^{\gamma_p} = \Gamma_{t+1} \Gamma_{t+2} \dots \Gamma_{t+j}$$

le facteur de croissance du prix d'une firme qui ne reçoit pas un signal favorable durant j périodes successives (pour $j = 0$ nous avons $\Gamma_{t,t} = 1$, pour $j = 1$ nous avons $\Gamma_{t+1,t} = \Gamma_{t+1}$).

La condition du premier ordre et la condition de l'enveloppe du programme d'une firme ι recevant un signal favorable sont données par :

$$\Pi'_t(P^*) + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \mathcal{V}'_{t+1}(P^*) \right] = 0 \quad (\text{A.13a})$$

$$\frac{\mathcal{V}'_t(P_{t-1}(\iota))}{\Gamma_t} = \Pi'_t(\Gamma_t P_{t-1}(\iota)) + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \mathcal{V}'_{t+1}(\Gamma_t P_{t-1}(\iota)) \right] \quad (\text{A.13b})$$

avec la dérivée du profit en \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} \Pi'_t(\mathcal{P}) &= \varepsilon_{y,t} \frac{1 - \theta_f(1 + \psi_f)}{1 + \psi_f} \left(\frac{\mathcal{P}}{P_t} \right)^{-(1+\psi_f)\theta_f} \Theta_t^{(1+\psi_f)\theta_f} Y_t \\ &+ \theta_f \left(\frac{\mathcal{P}}{P_t} \right)^{-(1+\psi_f)\theta_f - 1} \Theta_t^{(1+\psi_f)\theta_f} mc_t Y_t + \frac{\psi_f}{1 + \psi_f} \varepsilon_{y,t} Y_t \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En supposant momentanément, pour alléger les notations, que le prix hérité du passé est \mathcal{P} , on peut réécrire la condition de l'enveloppe en décalant d'une période vers le futur sous la forme :

$$\mathcal{V}'_{t+1}(\mathcal{P}) = \Gamma_{t+1,t} \Pi'_{t+1}(\Gamma_{t+1,t} \mathcal{P}) + \beta \xi_p \Gamma_{t+1,t} \mathbb{E}_{t+1} \left[\frac{\Lambda_{t+2}}{\Lambda_{t+1}} \mathcal{V}'_{t+2}(\Gamma_{t+1,t} \mathcal{P}) \right]$$

en itérant vers le futur et en appliquant l'espérance conditionnelle à l'information en t , il vient :

$$\mathbb{E}_t [\mathcal{V}'_{t+1}(\mathcal{P})] = \mathbb{E}_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\beta \xi_p)^j \Gamma_{t+1+j,t} \frac{\Lambda_{t+1+j}}{\Lambda_{t+1}} \Pi'_{t+1+j}(\Gamma_{t+1+j,t} \mathcal{P}) \right]$$

En substituant dans la condition du premier ordre (pour $\mathcal{P} = P^*$), on obtient la condition suivante pour le prix optimal choisit par une firme qui reçoit un signal favorable :

$$\mathbb{E}_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\beta \xi_p)^j \Gamma_{t+j,t} \frac{\Lambda_{t+j}}{\Lambda_t} \Pi'_{t+j}(\Gamma_{t+j,t} P_t^*) \right] = 0 \quad (\text{A.15})$$

Le prix optimal P_t^* est le prix qui assure la nullité de la somme (escomptée) du profit marginal contemporain (en t) et des profits marginaux anticipés dans le cas où la firme ne peut mettre à jour son prix qu'en suivant la règle *ad hoc* (2.7).

En passant notons qu'il est possible d'obtenir une écriture récursive (mais non linéaire) du multiplicateur Θ_t qui apparaît dans l'expression du profit (cette écriture récursive servira plus bas). L'équation (A.8) peut s'écrire de façon équivalente sous la forme :

$$\Theta_t^{1-\theta_f(1+\psi_f)} = \int_0^1 \left(\frac{P_t(\iota)}{P_t} \right)^{1-\theta_f(1+\psi_f)} d\iota$$

Sous l'intégrale apparaît le prix proposé par la firme ι à la date t . Ce prix a été déterminé de façon optimale j périodes auparavant avec probabilité $(1 - \xi_p)\xi_p^j$. Ainsi nous pouvons écrire l'intégrale sous la forme suivante²⁰ :

$$\Theta_t^{1-\theta_f(1+\psi_f)} = (1 - \xi_p) \sum_{j=0}^{\infty} \xi_p^j \left(\frac{\Gamma_{t,t-j} P_{t-j}^*}{P_t} \right)^{1-\theta_f(1+\psi_f)}$$

20. On note que $(1 - \xi_p) \sum_{j=0}^{\infty} \xi_p^j = 1$.

où P_t^* est le prix optimal à la date t . Finalement, on peut voir cette somme infinie comme la solution de l'équation récurrente suivante :

$$\Theta_t^{1-\theta_f(1+\psi_f)} = (1-\xi_p) \left(\frac{P_t^*}{P_t} \right)^{1-\theta_f(1+\psi_f)} + \xi_p \left(\frac{\Gamma_{t,t-1}}{\pi_t} \right)^{1-\theta_f(1+\psi_f)} \Theta_{t-1}^{1-\theta_f(1+\psi_f)} \quad (\text{A.16})$$

Nous pouvons obtenir une expression plus explicite du prix qui satisfait l'équation (A.15). En substituant dans cette équation l'expression du profit marginal (A.14) et en divisant par $P_t^{*-(1+\psi_f)\theta_f}$ on obtient :

$$\frac{P_t^*}{P_t} = \frac{\theta_f(1+\psi_f)}{\theta_f(1+\psi_f)-1} \frac{\mathcal{Z}_{1,t}}{\mathcal{Z}_{2,t}} + \frac{\psi_f}{\theta_f(1+\psi_f)-1} \left(\frac{P_t^*}{P_t} \right)^{1+(1+\psi_f)\theta_f} \frac{\mathcal{Z}_{3,t}}{\mathcal{Z}_{2,t}} \quad (\text{A.17})$$

avec

$$\mathcal{Z}_{1,t} = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \xi_p)^i \lambda_{t+i} \left(\frac{\Gamma_{t+i}}{P_{t+i}/P_t} \right)^{-(1+\psi_f)\theta_f} \Theta_{t+i}^{(1+\psi_f)\theta_f} m c_{t+i} Y_{t+i} \quad (\text{A.18a})$$

$$\mathcal{Z}_{2,t} = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \xi_p)^i \lambda_{t+i} \varepsilon_{y,t+i} \left(\frac{\Gamma_{t+i}}{P_{t+i}/P_t} \right)^{1-(1+\psi_f)\theta_f} \Theta_{t+i}^{(1+\psi_f)\theta_f} Y_{t+i} \quad (\text{A.18b})$$

$$\mathcal{Z}_{3,t} = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \xi_p)^i \lambda_{t+i} \varepsilon_{y,t+i} \frac{\Gamma_{t+i}}{P_{t+i}/P_t} Y_{t+i} \quad (\text{A.18c})$$

En notant que P_{t+j}/P_t , le facteur d'inflation entre t et $t+j$, peut s'écrire de façon équivalente sous la forme $\prod_{i=1}^j \pi_{t+i}$, nous pouvons représenter les variables $\mathcal{Z}_{1,t}$, $\mathcal{Z}_{2,t}$ et $\mathcal{Z}_{3,t}$ sous forme récursive :

$$\mathcal{Z}_{1,t} = \widehat{\lambda}_t m c_t \Theta_t^{(1+\psi_f)\theta_f} \widehat{Y}_t + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_{t-1}^{\gamma_p} \bar{\pi}^{1-\gamma_p}} \right)^{(1+\psi_f)\theta_f} \mathcal{Z}_{1,t+1} \right] \quad (\text{A.19a})$$

$$\mathcal{Z}_{2,t} = \widehat{\lambda}_t \varepsilon_{y,t} \Theta_t^{(1+\psi_f)\theta_f} \widehat{Y}_t + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_{t-1}^{\gamma_p} \bar{\pi}^{1-\gamma_p}} \right)^{(1+\psi_f)\theta_f-1} \mathcal{Z}_{2,t+1} \right] \quad (\text{A.19b})$$

$$\mathcal{Z}_{3,t} = \widehat{\lambda}_t \varepsilon_{y,t} \widehat{Y}_t + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\pi_{t+1}^{\gamma_p} \bar{\pi}^{1-\gamma_p}}{\pi_{t+1}} \right) \mathcal{Z}_{3,t+1} \right] \quad (\text{A.19c})$$

En notant que $\vartheta_{f,t} \equiv \int_0^1 \frac{P_t(\iota)}{P_t} d\iota$ peut s'écrire sous forme récursive :

$$\vartheta_{f,t} = (1-\xi_p) \frac{P_t^*}{P_t} + \xi_p \frac{\bar{\pi}^{1-\gamma_p} \pi_{t-1}^{\gamma_p}}{\pi_t} \vartheta_{f,t-1} \quad (\text{A.20})$$

nous pouvons finalement écrire l'équation (A.9) de façon équivalente sous la forme :

$$\frac{\psi_f \vartheta_{f,t}}{1+\psi_f} + \frac{\Theta_t}{1+\psi_f} = 1 \quad (\text{A.21})$$

Au final la dynamique de l'inflation est caractérisée par les équations (A.21), (A.20), (A.16), (A.17), (A.19a), (A.19b), (A.19c).

A.3 Le travail et la formation des salaires

A.3.1 L'agence d'emploi

Elle agrège le travail $l_t(\varsigma)$ offert par les syndicats à l'aide d'une fonction d'agrégation à la [Kimball \(1996\)](#), définie implicitement par :

$$\int_0^1 \mathcal{G}_s \left(\frac{l_t(\varsigma)}{\mathcal{L}_t} \right) d\varsigma = 1 \quad (\text{A.22})$$

où \mathcal{G}_s est une fonction strictement croissante et concave telle que $\mathcal{G}_s(1) = 1$. Nous adoptons la forme fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{G}_s(x) = \frac{\theta_s(1+\psi_s)}{(1+\psi_s)(\theta_s(1+\psi_s)-1)} \left[(1+\psi_s)x - \psi_s \right]^{\frac{(1+\psi_s)\theta_s-1}{(1+\psi_s)\theta_s}} - \left[\frac{\theta_s(1+\psi_s)}{(1+\psi_s)(\theta_s(1+\psi_s)-1)} - 1 \right] \quad (\text{A.23})$$

L'agence d'emploi choisit la quantité relative de travail de type ς de façon à minimiser son coût de production par unité de travail homogène, $\frac{W_t(\varsigma)}{W_t} \frac{l_t(\varsigma)}{\mathcal{L}_t}$, sous la contrainte technologique (A.22) et (A.23). La condition du premier ordre associée au programme de l'agence d'emploi détermine sa demande en bien intermédiaire²¹ ς :

$$\frac{l_t(\varsigma)}{\mathcal{L}_t} = \frac{1}{1+\psi_s} \left[\left(\frac{W_t(\varsigma)/W_t}{\Upsilon_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} + \psi_s \right] \quad (\text{A.24})$$

où Υ_t est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte technologique (A.22) et (A.23) de la firme représentative. En substituant (A.24) dans la contrainte technologique on obtient l'expression suivante du multiplicateur de Lagrange :

$$\Upsilon_t = \left(\int_0^1 \left(\frac{W_t(\varsigma)}{W_t} \right)^{1-\theta_s(1+\psi_s)} d\varsigma \right)^{\frac{1}{1-\theta_s(1+\psi_s)}} \quad (\text{A.25})$$

Puisque l'agence d'emploi adopte un comportement concurrentiel, son profit doit être nul et nous déduisons le salaire agrégé :

$$W_t = \frac{\psi_s}{1+\psi_s} \int_0^1 W_t(\varsigma) d\varsigma + \frac{1}{1+\psi_s} \left(\int_0^1 W_t(\varsigma)^{1-(1+\psi_s)\theta_s} d\varsigma \right)^{\frac{1}{1-(1+\psi_s)\theta_s}} \quad (\text{A.26})$$

21. Afin d'économiser les notations, nous ne faisons pas la différence entre la demande de l'agence d'emploi et l'offre des syndicats.

A.3.2 Les syndicats

Ils produisent un facteur travail différencié à partir de l'offre de travail homogène des ménages. Les syndicats disposent d'un pouvoir de marché grâce à la différenciation de l'offre de travail homogène des ménages. Le profit d'un syndicat est proposant un salaire $W_t(\varsigma)$ et offrant $l_t(\varsigma)$ unités de travail :

$$\mathcal{S}_t(W_t(\varsigma)) = (\varepsilon_{l,t} W_t(\varsigma) - W_t^m) l_t(\varsigma)$$

où $\log \varepsilon_{l,t}$, un aléa exogène sur la recette du syndicat, est un processus ARMA stationnaire d'espérance nulle. Pour une demande donnée, si $\varepsilon_{l,t} = 1$, la mesure du profit du syndicat est donné par la différence entre le salaire demandé à l'agence d'emploi (recette) et celui reversé au ménage (coût). En substituant la fonction de demande (A.24) de l'agence d'emploi :

$$\mathcal{S}_t(W_t(\varsigma)) = (\varepsilon_{l,t} W_t(\varsigma) - W_t^m) \frac{1}{1 + \psi_s} \left[\left(\frac{W_t(\varsigma)/W_t}{\Upsilon_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} + \psi_s \right] \mathcal{L}_t \quad (\text{A.27})$$

Chaque syndicat subit une loterie à la Calvo (1983). À chaque période un syndicat peut ajuster le salaire $W_t(\varsigma)$ de façon optimale avec probabilité ξ_w . Dans ce cas, le syndicat choisit le salaire W_t^* qui maximise son profit sachant que dans le futur il n'aura pas l'occasion d'ajuster comme il le souhaite son salaire pendant un certain nombre de périodes (en moyenne pendant $(1 - \xi_w)^{-1}$ périodes). Lorsque la loterie est défavorable au syndicat (avec probabilité $1 - \xi_w$), celui-ci ajuste son salaire en suivant une règle *ad-hoc* :

$$W_t(\varsigma) = \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}} \bar{\pi}^{1-\gamma_w} \pi_{t-1}^{\gamma_w} W_{t-1}(\varsigma) \quad (\text{A.28})$$

On notera $\Omega_t = (\mathcal{A}_{T,t}/\mathcal{A}_{T,t-1}) \bar{\pi}^{1-\gamma_w} \pi_{t-1}^{\gamma_w} \equiv \Omega_{t,t-1}$ le facteur de croissance du salaire nominal du syndicat ς à la date t si celui-ci n'a pas l'opportunité de réviser son prix de façon optimale. Dans ce cas, le syndicat augmente son salaire en indexant celui-ci sur (i) un mélange convexe de la cible d'inflation de l'autorité monétaire et sur l'inflation passé et (ii) la croissance de l'efficacité des firmes du secteur des biens intermédiaires. Plus généralement on notera :

$$\Omega_{t+j,t} = \frac{\mathcal{A}_{T,t+j}}{\mathcal{A}_{T,t}} \bar{\pi}^{j(1-\gamma_w)} \left(\prod_{h=0}^{j-1} \pi_{t+h} \right)^{\gamma_w} = \Omega_{t+1} \Omega_{t+2} \dots \Omega_{t+j}$$

le facteur de croissance du salaire d'un syndicat qui ne reçoit pas un signal favorable durant j périodes successives (pour $j = 0$ nous avons $\Omega_{t,t} = 1$, pour $j = 1$ nous avons $\Omega_{t+1,t} = \Omega_{t+1}$).

Soient $\tilde{\mathcal{U}}_t$ la valeur d'un syndicat qui reçoit un signal favorable à la date t et $\mathcal{U}_t(W_{t-1}(\varsigma))$ la valeur d'un syndicat recevant le mauvais signal à la date t . Dans ce cas, le syndicat suit simplement la règle *ad hoc* (A.28), cela explique pourquoi sa valeur à la date t dépend de $W_{t-1}(\varsigma)$. À l'inverse le programme d'un syndicat recevant un signal favorable est purement tourné vers le futur, sa valeur à la date t ne dépend d'aucune variable d'état endogène. De plus, puisque les syndicats ont les mêmes espérances quant au futur, ils choisiront tous le même prix optimal (W_t^*). Plus formellement la valeur à la date t d'un syndicat recevant le signal favorable est :

$$\tilde{\mathcal{U}}_t = \max_{\mathbf{W}} \left\{ \mathcal{S}_t(\mathbf{W}) + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \left((1 - \xi_w) \tilde{\mathcal{U}}_{t+1} + \xi_w \mathcal{U}_{t+1}(\mathbf{W}) \right) \right] \right\} \quad (\text{A.29})$$

où Λ_t est le multiplicateur de la contrainte budgétaire nominale du ménage représentatif, on notera W_t^* le salaire optimal d'un syndicat ayant la possibilité d'ajuster comme il le souhaite son prix. La valeur à la date t d'un syndicat malchanceux dans la loterie à la Calvo est :

$$\mathcal{U}_t(W_{t-1}(\varsigma)) = \mathcal{S}_t(\Gamma_t W_{t-1}(\varsigma)) + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \left((1 - \xi_w) \tilde{\mathcal{U}}_{t+1} + \xi_w \mathcal{U}_{t+1}(\Gamma_t W_{t-1}(\varsigma)) \right) \right] \quad (\text{A.30})$$

La condition du premier ordre et la condition de l'enveloppe sont données par :

$$\mathcal{S}'_t(W_t^*) + \beta \xi_w \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \mathcal{U}'_{t+1}(W_t^*) \right] = 0 \quad (\text{A.31a})$$

$$\frac{\mathcal{U}'_t(W_{t-1}(\varsigma))}{\Gamma_t} = \mathcal{S}'_t(\Gamma_t W_{t-1}(\varsigma)) + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \mathcal{U}'_{t+1}(\Gamma_t W_{t-1}(\varsigma)) \right] \quad (\text{A.31b})$$

avec la dérivée du profit du syndicat en \mathcal{W} :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_t(\mathcal{W}) &= \varepsilon_{l,t} \frac{1 - \theta_s(1 + \psi_s)}{1 + \psi_s} \left(\frac{\mathcal{W}}{W_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} \Upsilon_t^{(1+\psi_s)\theta_s} \mathcal{L}_t \\ &+ \theta_s \left(\frac{\mathcal{W}}{W_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s - 1} \Upsilon_t^{(1+\psi_s)\theta_s} \frac{W_t^m}{W_t} \mathcal{L}_t + \frac{\psi_s}{1 + \psi_s} \varepsilon_{l,t} \mathcal{L}_t \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

En supposant momentanément, pour alléger les notations, que le salaire hérité du passé est \mathcal{W} , on peut réécrire la condition de l'enveloppe en décalant d'une période vers le futur sous la forme :

$$\mathcal{U}'_{t+1}(\mathcal{W}) = \Omega_{t+1,t} \mathcal{S}'_{t+1}(\Omega_{t+1,t} \mathcal{W}) + \beta \xi_p \Omega_{t+1,t} \mathbb{E}_{t+1} \left[\frac{\Lambda_{t+2}}{\Lambda_{t+1}} \mathcal{U}'_{t+2}(\Omega_{t+1,t} \mathcal{W}) \right]$$

en itérant vers le futur et en appliquant l'espérance conditionnelle à l'information en t , il vient :

$$\mathbb{E}_t [\mathcal{U}'_{t+1}(\mathcal{W})] = \mathbb{E}_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\beta \xi_p)^j \Omega_{t+1+j,t} \frac{\Lambda_{t+1+j}}{\Lambda_{t+1}} \mathcal{S}'_{t+1+j}(\Omega_{t+1+j,t} \mathcal{W}) \right]$$

En substituant dans la condition du premier ordre (pour $\mathcal{W} = W_t^*$), on obtient la condition suivante pour le prix optimal choisit par une firme qui reçoit un signal favorable :

$$\mathbb{E}_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\beta \xi_p)^j \Omega_{t+j,t} \frac{\Lambda_{t+j}}{\Lambda_t} \mathcal{S}'_{t+j}(W_{t+j}^*) \right] = 0 \quad (\text{A.33})$$

Le prix optimal W_t^* est le salaire nominal qui assure la nullité de la somme (escomptée) du profit marginal contemporain (en t) et des profits marginaux anticipés dans le cas où le syndicat ne peut mettre à jour le salaire nominal qu'en suivant la règle *ad hoc* (A.28).

De la même façon que dans la section 2.4, on peut montrer qu'il est possible d'obtenir une expression récursive du multiplicateur Υ_t qui

apparaît dans l'expression du profit du syndicat. L'équation (A.25) peut s'écrire de façon équivalente sous la forme :

$$\Upsilon_t^{1-\theta_s(1+\psi_s)} = \int_0^1 \left(\frac{W_t(\varsigma)}{W_t} \right)^{1-\theta_s(1+\psi_s)} d\varsigma$$

Sous l'intégrale apparaît le salaire proposé par le syndicat ς à la date t . Ce prix a été déterminé de façon optimale j périodes auparavant avec probabilité $(1 - \xi_w)\xi_w^j$. Ainsi nous pouvons écrire l'intégrale sous la forme suivante :

$$\Upsilon_t^{1-\theta_s(1+\psi_s)} = (1 - \xi_w) \sum_{j=0}^{\infty} \xi_w^j \left(\frac{\Omega_{t,t-j} W_{t-j}^*}{W_t} \right)^{1-\theta_s(1+\psi_s)}$$

où W_{t-j}^* est le salaire optimal à la date $t - j$. Finalement, on peut voir cette somme infinie comme la solution de l'équation récurrente suivante :

$$\Upsilon_t^{1-\theta_s(1+\psi_s)} = (1 - \xi_w) \left(\frac{W_t^*}{W_t} \right)^{1-\theta_s(1+\psi_s)} + \xi_w \left(\frac{\Omega_{t,t-1}}{W_t/W_{t-1}} \right)^{1-\theta_s(1+\psi_s)} \Upsilon_{t-1}^{1-\theta_s(1+\psi_s)} \quad (\text{A.34})$$

Nous pouvons obtenir une expression plus explicite du salaire qui satisfait l'équation (A.33). En substituant dans cette équation l'expression du profit marginal (A.32) et en divisant par $W_t^{*(1+\psi_s)\theta_s}$ on obtient :

$$\frac{w_t^*}{w_t} = \frac{\theta_s(1+\psi_s)}{\theta_s(1+\psi_s) - 1} \frac{\mathcal{H}_{1,t}}{\mathcal{H}_{2,t}} + \frac{\psi_s}{\theta_s(1+\psi_s) - 1} \left(\frac{w_t^*}{w_t} \right)^{1+(1+\psi_s)\theta_s} \frac{\mathcal{H}_{3,t}}{\mathcal{H}_{2,t}} \quad (\text{A.35})$$

où w_t^* est le salaire réel obtenu par un syndicat à la date t s'il peut ajuster son salaire nominal de façon optimale et w_t le salaire réel moyen dans l'économie, avec

$$\mathcal{H}_{1,t} = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \xi_w)^j \lambda_{t+j} w_{t+j}^m \left(\frac{\Omega_{t+j}}{w_{t+j} \frac{P_{t+j}}{P_t}} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} \Upsilon_{t+j}^{(1+\psi_s)\theta_s} \mathcal{L}_{t+j} \quad (\text{A.36a})$$

$$\mathcal{H}_{2,t} = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \xi_w)^j \lambda_{t+j} \varepsilon_{l,t+j} w_{t+j} \left(\frac{\Omega_{t+j}}{w_{t+j} \frac{P_{t+j}}{P_t}} \right)^{1-(1+\psi_s)\theta_s} \Upsilon_{t+j}^{(1+\psi_s)\theta_s} \mathcal{L}_{t+j} \quad (\text{A.36b})$$

$$\mathcal{H}_{3,t} = \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \xi_w)^j \lambda_{t+j} \varepsilon_{l,t+j} w_{t+j} \frac{\Omega_{t+j}}{w_{t+j} \frac{P_{t+j}}{P_t}} \mathcal{L}_{t+j} \quad (\text{A.36c})$$

En notant que w_{t+j}/w_t , le facteur de croissance du salaire réel entre t et $t + j$, peut s'écrire de façon équivalente sous la forme $\prod_{i=1}^j \varpi_{t+i}$ (ϖ_t est le facteur de croissance du salaire réel entre t et $t - 1$) et que l'on a :

$$\Omega_{t+j,t} = (1+g)^j \left(\prod_{h=1}^j \mathcal{E}_{t+h} \right)^{\frac{1}{1-\rho_x}} \left(\prod_{h=0}^{j-1} \bar{\pi}_{t+h} \right)^{\gamma_w} \left(\prod_{h=0}^{j-1} \pi_{t+h} \right)^{1-\gamma_w}$$

nous pouvons finalement représenter les variables $\mathcal{H}_{1,t}$, $\mathcal{H}_{2,t}$ et $\mathcal{H}_{3,t}$ sous forme réursive :

$$\mathcal{H}_{1,t} = \lambda_t w_t^m \mathcal{L}_t \Upsilon_t^{(1+\psi_s)\theta_s} + \beta \xi_w \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\varpi_{t+1} \pi_{t+1}}{(1+g) \mathcal{E}_{t+1}^{\frac{1}{1-\rho_x}} \pi_{t-1}^{\gamma_w} \bar{\pi}_t^{1-\gamma_w}} \right)^{(1+\psi_s)\theta_s} \mathcal{H}_{1,t+1} \right] \quad (\text{A.37a})$$

$$\mathcal{H}_{2,t} = \lambda_t \varepsilon_{l,t} w_t \mathcal{L}_t \Upsilon_t^{(1+\psi_s)\theta_s} + \beta \xi_w \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\varpi_{t+1} \pi_{t+1}}{(1+g) \mathcal{E}_{t+1}^{\frac{1}{1-\rho_x}} \pi_{t-1}^{\gamma_w} \bar{\pi}_t^{1-\gamma_w}} \right)^{(1+\psi_s)\theta_s - 1} \mathcal{H}_{2,t+1} \right] \quad (\text{A.37b})$$

$$\mathcal{H}_{3,t} = \lambda_t \varepsilon_{l,t} w_t \mathcal{L}_t + \beta \xi_w \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\varpi_{t+1} \pi_{t+1}}{(1+g) \mathcal{E}_{t+1}^{\frac{1}{1-\rho_x}} \pi_{t-1}^{\gamma_w} \bar{\pi}_t^{1-\gamma_w}} \right) \mathcal{H}_{3,t+1} \right] \quad (\text{A.37c})$$

En notant que $\vartheta_{s,t} \equiv \int_0^1 \frac{W_t(\varsigma)}{W_t} d\varsigma$ peut s'écrire sous forme réursive :

$$\vartheta_{s,t} = (1 - \xi_w) \frac{w_t^*}{w_t} + \xi_w \frac{(1+g) \mathcal{E}_{t+1}^{\frac{1}{1-\rho_x}} \pi_{t-1}^{\gamma_w} \bar{\pi}_t^{1-\gamma_w}}{\varpi_{t+1} \pi_t} \vartheta_{s,t-1} \quad (\text{A.38})$$

nous pouvons finalement écrire l'équation (A.26) de façon équivalente sous la forme :

$$\frac{\psi_s \vartheta_{s,t}}{1+\psi_s} + \frac{\Upsilon_t}{1+\psi_s} = 1 \quad (\text{A.39})$$

Au final la dynamique du salaire réel est caractérisée par les équations (A.31), (A.38), (A.34), (A.35), (A.37a), (A.37b), (A.37c).

A.4 Équilibre

A.4.1 Distorsions de prix

Les prix dans le secteur des biens intermédiaires sont hétérogènes, néanmoins nous pouvons facilement établir que cette hétérogénéité des décisions n'empêche pas l'agrégation. Nous savons que les firmes du secteur des biens intermédiaires vont toutes choisir le même mélange de facteurs de productions dans le sens où le ratio de la demande de capital à la demande de travail est invariant dans la coupe des firmes, voir l'équation (A.10). En exprimant la demande de travail de la firme ι en fonction de sa demande de capital physique, nous pouvons écrire la production de cette firme de la façon suivante :

$$y_t(\iota) = \left(\frac{A_t L_t^d}{K_t^d} \right)^{1-\alpha} K_t^d(\iota)$$

Si $K_t^d \equiv \int_0^1 K_t^d(\iota) d\iota$ est la demande agrégée de capital physique et si $y_t \equiv \int_0^1 Y_t(\iota) d\iota$ désigne la somme des productions intermédiaires, alors nous avons directement :

$$y_t = \left(K_t^d\right)^\alpha \left(A_t L_t^d\right)^{1-\alpha}$$

La somme des productions intermédiaires est différente de Y_t , car la technologie d'agrégation considérée ici n'est pas linéaire. En intégrant la fonction de demande en bien ι des producteurs de bien homogène (A.7) par rapport à ι , on trouve :

$$y_t = \Delta_{p,t} Y_t \quad (\text{A.40})$$

avec :

$$\Delta_{p,t} \equiv \frac{1}{1 + \psi_f} \int_0^1 \left(\left(\frac{P_t(\iota)/P_t}{\Theta_t} \right)^{-(1+\psi_f)\theta_f} + \psi_f \right) d\iota \quad (\text{A.41})$$

La distorsion de prix peut s'écrire sous forme récursive de la façon suivante :

$$\Delta_{p,t} = \frac{1}{1 + \psi_f} \Theta_t^{(1+\psi_f)\theta_f} \nabla_{p,t} + \frac{\psi_f}{1 + \psi_f} \quad (\text{A.42a})$$

$$\nabla_{p,t} = (1 - \xi_p) \left(\frac{P_t^*}{P_t} \right)^{-(1+\psi_f)\theta_f} + \xi_p \left(\frac{\bar{\pi}_t^{\gamma_p} \pi_t^{1-\gamma_p}}{\pi_t} \right)^{-(1+\psi_f)\theta_f} \nabla_{p,t-1} \quad (\text{A.42b})$$

où le multiplicateur de lagrange Θ_t est défini récursivement dans l'équation (A.16). Ainsi, nous avons :

$$\Delta_{p,t} Y_t = \left(K_t^d\right)^\alpha \left(A_t L_t^d\right)^{1-\alpha} \quad (\text{A.43})$$

A.4.2 distorsions de salaires

Nous montrons ici comment lier l'offre agrégée de travail des ménages avec l'offre de travail de l'agence d'emploi aux firmes du secteur des biens intermédiaires. Ce lien est affecté par l'hétérogénéité de salaire induite par la rigidité nominale rigidités à la Calvo sur le salaire. En intégrant la demande de travail de type ς de l'agence d'emploi (A.24) par rapport à ς , on trouve directement :

$$L_t = \Delta_{w,t} \mathcal{L}_t \quad (\text{A.44})$$

avec :

$$\Delta_{w,t} \equiv \frac{1}{1 + \psi_s} \int_0^1 \left(\left(\frac{W_t(\varsigma)/W_t}{\Upsilon_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} + \psi_s \right) d\varsigma \quad (\text{A.45})$$

La distorsion de prix peut s'écrire sous forme récursive de la façon suivante :

$$\Delta_{w,t} = \frac{1}{1 + \psi_s} \Upsilon_t^{(1+\psi_s)\theta_s} \nabla_{w,t} + \frac{\psi_s}{1 + \psi_s} \quad (\text{A.46a})$$

$$\nabla_{w,t} = (1 - \xi_w) \left(\frac{w_t^*}{w_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} + \xi_w \left(\frac{(1+g) \mathcal{E}_t^{\frac{1}{1-\rho_x}} \bar{\pi}_t^{\gamma_w} \pi_t^{1-\gamma_w}}{\varpi_t \pi_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} \nabla_{w,t-1} \quad (\text{A.46b})$$

où le multiplicateur de lagrange Υ_t est défini récursivement dans l'équation (A.34).

A.4.3 Dividendes versés par les firmes du secteur des biens intermédiaires

Les firmes du secteur des biens intermédiaires jouent en concurrence monopolistique et réalisent des profits qui sont reversés sous forme de dividendes aux ménages. Calculons la somme des profits nominaux à la date t :

$$\begin{aligned} \Pi_t &= \int_0^1 \Pi_t(\iota) d\iota \\ &= \int_0^1 \left(\varepsilon_{y,t} \frac{P_t(\iota)}{P_t} - mc_t \right) P_t Y_t(\iota) d\iota \\ &= \varepsilon_{y,t} \int_0^1 P_t(\iota) Y_t(\iota) d\iota - P_t mc_t y_t \\ &= \varepsilon_{y,t} P_t Y_t - \left(P_t r_t^k \int_0^1 K_t^d(\iota) d\iota + (1 + \tau_{L,t}) W_t \int_0^1 L_t^d(\iota) d\iota \right) \\ &= P_t \left(\varepsilon_{y,t} Y_t - r_t^k K_t^d - (1 + \tau_{L,t}) w_t L_t^d \right) \end{aligned}$$

Puisque les ménages détiennent les firmes du secteur intermédiaires, les profits sont reversés aux ménages. La répartition du profit agrégé entre les ménages est indéterminé à l'équilibre général, mais nous savons que :

$$\int_0^1 \mathcal{D}_{1,t}(h) dh = P_t \left(\varepsilon_{y,t} Y_t - r_t^k K_t^d - (1 + \tau_{L,t}) w_t L_t^d \right) \quad (\text{A.47})$$

A.4.4 Dividendes versés par les syndicats

De la même façon nous pouvons calculer le profit nominal agrégé des syndicats à la date t . Ces profits seront aussi reversés aux ménages sous forme de dividendes. Nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_t &= \int_0^1 \mathcal{S}_t(\varsigma) d\varsigma \\ &= \int_0^1 (\varepsilon_{l,t} W_t(l) - W_t^m) l_t(\varsigma) d\varsigma \\ &= \varepsilon_{l,t} \int_0^1 W_t(\varsigma) l_t(\varsigma) d\varsigma - W_t^m L_t \\ &= \varepsilon_{l,t} W_t \mathcal{L}_t - W_t^m L_t\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\int_0^1 \mathcal{D}_{2,t}(h) dh = \varepsilon_{l,t} W_t \mathcal{L}_t - W_t^m L_t \quad (\text{A.48})$$

A.4.5 Apurement des marchés des facteurs et du marché des titres

À l'équilibre général, l'offre de travail de l'agence d'emploi égalise la demande agrégée de travail des firmes du secteur intermédiaire et l'offre agrégée de capital physique des ménages égalise la demande agrégée des firmes du secteur intermédiaire. Plus formellement, nous avons :

$$\mathcal{L}_t \equiv \Delta_{w,t}^{-1} \int_0^1 L_t(h) dh = \int_0^1 L_t^d(l) dl \equiv L_t^d \quad (\text{A.49})$$

$$\tilde{K}_t \equiv \int_0^1 z_t(h) K_{t-1}(h) dh = \int_0^1 K_t^d(l) dl \equiv K_t^d \quad (\text{A.50})$$

De plus la demande agrégée de titres par les ménages égalise l'offre de titres émanant de l'État :

$$\int_0^1 B_t(h) dh = B_t \quad (\text{A.51})$$

A.4.6 Équilibre du marché des biens

En sommant les contraintes budgétaires des ménages (2.2) sur $h \in [0, 1]$ et en substituant les conditions d'équilibre sur le marché des titres, la définition des dividendes agrégés ainsi que la contrainte budgétaire du gouvernement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}P_t G_t + P_t C_t + p_{I,t} P_t I_t &= \tau_{L,t} W_t L_t^d + \tau_{W,t} W_t^m L_t \\ &+ (1 - \tau_{R,t}) \left\{ (1 - \tau_{W,t}) W_t^m L_t + P_t r_t^K z_t K_{t-1} + P_t (\varepsilon_{y,t} Y_t - r_t^K K_t^d - (1 + \tau_{L,t}) w_t L_t^d) + \varepsilon_{lt} W_t \mathcal{L}_t - W_t^m L_t \right. \\ &\left. + \tau_{R,t} \left\{ (1 - \tau_{W,t}) W_t^m L_t + P_t r_t^K z_t K_{t-1} + P_t (\varepsilon_{y,t} Y_t - r_t^K K_t^d - (1 + \tau_{L,t}) w_t L_t^d) \right\} \right\}\end{aligned}$$

En simplifiant et sachant que les marchés des facteurs sont équilibrés, il vient :

$$G_t + C_t + p_{I,t} I_t = \varepsilon_{y,t} Y_t + (\varepsilon_{l,t} - 1) w_t L_t \quad (\text{A.52a})$$

ou de façon équivalente :

$$G_t + C_t + p_{I,t} I_t = \varepsilon_{y,t} \Delta_{p,t}^{-1} y_t + (\varepsilon_{l,t} - 1) \Delta_{w,t}^{-1} w_t L_t \quad (\text{A.52b})$$

Notons enfin que si les chocs $\varepsilon_{y,t}$ et $\varepsilon_{l,t}$ s'interprètent comme des taxes (ce n'est pas le cas ici, nous avons supposé que les firmes et les syndicats sont plus ou moins efficaces dans la récolte de leurs recettes) et apparaissent donc comme des revenus dans le budget de l'État, alors le membre de droite se réduit simplement à Y_t .

B Long terme du modèle

L'économie décrite par ce modèle croît à taux constant dans le long terme. Pour simuler et estimer ce modèle nous devons le rendre stationnaire et calculer l'état stationnaire de la version stationnaire du modèle. Dans ce modèle la seule source de croissance à long terme des variables réelles vient de la tendance de l'efficacité harrodienne. Nous normalisons donc les variables non stationnaires par $\mathcal{A}_{T,t}$ ou une puissance de cette variable. Dans cette section nous présentons la version stationnaire des équations nécessaires à la simulation (stochastique) du modèle, puis nous calculons l'état stationnaire du modèle.

B.1 Version stationnaire du modèle

Du côté du ménage, nous posons $C_t \equiv \hat{C}_t \mathcal{A}_{T,t}$, $\lambda_t = \hat{\lambda}_t \mathcal{A}_{T,t}^{-\sigma_c}$, $w_t^m = \hat{w}_t^m \mathcal{A}_{T,t}$, $I_t \equiv \hat{I}_t \mathcal{A}_{T,t}$. Afin de faciliter l'estimation (ou la calibration) du niveau de long terme de $\varepsilon_{L,t}$ (i.e le facteur d'échelle qui permet d'obtenir le niveau de long terme désiré des heures) on redéfinit la fonction d'utilité en remplaçant L_t par L_t/L où L est le niveau de long terme des heures (cela revient implicitement à redéfinir le choc d'offre de travail, en particulier son niveau de long terme).

$$\left(\hat{C}_t - \eta \frac{\mathcal{A}_{T,t-1} \hat{C}_{t-1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{-\sigma_c} \exp \left\{ \varepsilon_{L,t} \frac{\sigma_c - 1}{1 + \sigma_l} \left(\frac{L_t}{L} \right)^{1 + \sigma_l} \right\} = (1 + \tau_{C,t}) \hat{\lambda}_t \quad (\text{B.1})$$

$$(1 - \tau_{R,t}) \hat{\lambda}_t = \beta \varepsilon_{B,t} R_t \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{-\sigma_c} \frac{(1 - \tau_{R,t+1}) \hat{\lambda}_{t+1}}{\pi_{t+1}} \right] \quad (\text{B.2})$$

$$\left[\widehat{C}_t - \eta \frac{\mathcal{A}_{T,t-1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \widehat{C}_{t-1} \right]^{1-\sigma_c} \frac{\varepsilon_{L,t}}{L} \exp \left\{ \varepsilon_{L,t} \frac{\sigma_c - 1}{1 + \sigma_l} \left(\frac{L_t}{L} \right)^{1+\sigma_l} \right\} \left(\frac{L_t}{L} \right)^{\sigma_l} = \widehat{\lambda}_t (1 - \tau_{R,t}) (1 - \tau_{W,t}) \widehat{w}_t^m \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{p_{I,t}}{\varepsilon_{I,t}} = Q_t \left[1 - \mathcal{S} \left(\frac{\widehat{I}_t}{\widehat{I}_{t-1}} \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}} \right) - \frac{\widehat{I}_t}{\widehat{I}_{t-1}} \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}} \mathcal{S}' \left(\frac{\widehat{I}_t}{\widehat{I}_{t-1}} \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}} \right) \right] + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\widehat{\lambda}_{t+1}}{\widehat{\lambda}_t} \left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{-\sigma_c} Q_{t+1} \frac{\varepsilon_{I,t+1}}{\varepsilon_{I,t}} \left(\frac{\widehat{I}_{t+1}}{\widehat{I}_t} \frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^2 \mathcal{S}' \left(\frac{\widehat{I}_{t+1}}{\widehat{I}_t} \frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right) \right] \quad (\text{B.4})$$

$$Q_t \delta' (z_t) = (1 - \tau_{R,t}) r_t^k \quad (\text{B.5})$$

$$Q_t = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\widehat{\lambda}_{t+1}}{\widehat{\lambda}_t} \left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{-\sigma_c} \left(Q_{t+1} (1 - \delta(z_{t+1})) + (1 - \tau_{R,t+1}) r_{t+1}^k z_{t+1} \right) \right] \quad (\text{B.6})$$

Notons que le Q de Tobin Q_t est une variable stationnaire. Ainsi, par définition du Q de Tobin, le multiplicateur μ_t diverge de la même façon que λ_t ; si nécessaire on adoptera la notation $\widehat{\mu}_t = \mu_t \mathcal{A}_{T,t}^{\sigma_c}$. En posant $K_t \equiv \widehat{K}_t \mathcal{A}_{T,t}$, la loi d'évolution du stock de capital s'écrit :

$$\widehat{K}_t = (1 - \delta(z_t)) \frac{\mathcal{A}_{T,t-1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \widehat{K}_{t-1} + \varepsilon_{I,t} \left(1 - \mathcal{S} \left(\frac{\widehat{I}_t}{\widehat{I}_{t-1}} \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}} \right) \right) \widehat{I}_t \quad (\text{B.7})$$

Du côté de la production en posant : $w_t = \mathcal{A}_{T,t} \widehat{w}_t$ le salaire net payé par les firmes, $K_t^d = \mathcal{A}_{T,t} \widehat{K}_t^d$ le stock de capital physique installé à la date t , la frontière des prix des facteurs devient :

$$\frac{(1 + \tau_{L,t}) \widehat{w}_t L_t^d}{r_t^k \widehat{K}_t^d} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (\text{B.8})$$

le coût marginal s'écrit :

$$mc_t = A_{C,t}^{\alpha-1} \left(\frac{r_t^k}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{(1 + \tau_{L,t}) \widehat{w}_t}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \quad (\text{B.9})$$

Pour les équations de prix, en définissant $\mathcal{Z}_{i,t} = \widehat{\mathcal{Z}}_{i,t} \mathcal{A}_{T,t}^{1-\sigma_c}$ pour $i = 1, 2$ et 3 , nous avons :

$$\frac{P_t^*}{P_t} = \frac{\theta_f (1 + \psi_f)}{\theta_f (1 + \psi_f) - 1} \frac{\mathcal{Z}_{1,t}}{\mathcal{Z}_{2,t}} + \frac{\psi_f}{\theta_f (1 + \psi_f) - 1} \left(\frac{P_t^*}{P_t} \right)^{1+(1+\psi_f)\theta_f} \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_{3,t}}{\widehat{\mathcal{Z}}_{2,t}} \quad (\text{B.10})$$

et

$$\widehat{\mathcal{Z}}_{1,t} = \widehat{\lambda}_t mc_t \Theta_t^{(1+\psi_f)\theta_f} \widehat{Y}_t + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{1-\sigma_c} \left(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t^{\gamma_p} \pi_t^{1-\gamma_p}} \right)^{(1+\psi_f)\theta_f} \widehat{\mathcal{Z}}_{1,t+1} \right] \quad (\text{B.11a})$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_{2,t} = \widehat{\lambda}_t \varepsilon_{y,t} \Theta_t^{(1+\psi_f)\theta_f} \widehat{Y}_t + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{1-\sigma_c} \left(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t^{\gamma_p} \pi_t^{1-\gamma_p}} \right)^{(1+\psi_f)\theta_f - 1} \widehat{\mathcal{Z}}_{2,t+1} \right] \quad (\text{B.11b})$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_{3,t} = \widehat{\lambda}_t \varepsilon_{y,t} \widehat{Y}_t + \beta \xi_p \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{1-\sigma_c} \left(\frac{\pi_t^{\gamma_p} \pi_t^{1-\gamma_p}}{\pi_{t+1}} \right) \widehat{\mathcal{Z}}_{3,t+1} \right] \quad (\text{B.11c})$$

Les équations (A.20) et (A.21) sont inchangées. Du côté des syndicats et de l'agence d'emploi, nous définissons $\mathcal{H}_{i,t} = \widehat{\mathcal{H}}_{i,t} \mathcal{A}_{T,t}^{1-\sigma_c}$ pour $i = 1, 2$ et 3 , $w_t^* = \mathcal{A}_{T,t} \widehat{w}_t^*$ et $\varpi_t = \widehat{\varpi}_t \mathcal{A}_{T,t} / \mathcal{A}_{T,t-1}$. Le salaire relatif d'un syndicat ayant la possibilité d'ajuster son prix de façon optimale est donné par :

$$\frac{\widehat{w}_t^*}{\widehat{w}_t} = \frac{\theta_s (1 + \psi_s)}{\theta_s (1 + \psi_s) - 1} \frac{\widehat{\mathcal{H}}_{1,t}}{\widehat{\mathcal{H}}_{2,t}} + \frac{\psi_s}{\theta_s (1 + \psi_s) - 1} \left(\frac{\widehat{w}_t^*}{\widehat{w}_t} \right)^{1+(1+\psi_s)\theta_s} \frac{\widehat{\mathcal{H}}_{3,t}}{\widehat{\mathcal{H}}_{2,t}} \quad (\text{B.12})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{1,t} = \widehat{\lambda}_t \widehat{w}_t^m \mathcal{L}_t \Upsilon_t^{(1+\psi_s)\theta_s} + \beta \xi_w \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{1-\sigma_c} \left(\frac{\widehat{\varpi}_{t+1} \pi_{t+1}}{\pi_t^{\gamma_w} \pi_t^{1-\gamma_w}} \right)^{(1+\psi_s)\theta_s} \widehat{\mathcal{H}}_{1,t+1} \right] \quad (\text{B.13a})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{2,t} = \widehat{\lambda}_t \varepsilon_{l,t} \widehat{w}_t \mathcal{L}_t \Upsilon_t^{(1+\psi_s)\theta_s} + \beta \xi_w \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{1-\sigma_c} \left(\frac{\widehat{\varpi}_{t+1} \pi_{t+1}}{\pi_t^{\gamma_w} \pi_t^{1-\gamma_w}} \right)^{(1+\psi_s)\theta_s - 1} \widehat{\mathcal{H}}_{2,t+1} \right] \quad (\text{B.13b})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{3,t} = \widehat{\lambda}_t \varepsilon_{l,t} \widehat{w}_t \mathcal{L}_t + \beta \xi_w \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \right)^{1-\sigma_c} \left(\frac{\pi_t^{\gamma_w} \pi_t^{1-\gamma_w}}{\widehat{\varpi}_{t+1} \pi_{t+1}} \right) \widehat{\mathcal{H}}_{3,t+1} \right] \quad (\text{B.13c})$$

Nous pouvons exprimer $\vartheta_{s,t}$ en fonction du salaire stationnarisé :

$$\vartheta_{s,t} = (1 - \xi_w) \frac{\widehat{w}_t^*}{\widehat{w}_t} + \xi_w \frac{\pi_t^{\gamma_w} \pi_t^{1-\gamma_w}}{\widehat{\varpi}_t \pi_t} \vartheta_{s,t-1} \quad (\text{B.14})$$

l'équation (A.39) reste inchangée. On peut enfin exprimer la distorsion de salaire en fonction des salaires stationnarisés, c'est-à-dire écrire $\nabla_{w,t}$ sous la forme :

$$\nabla_{w,t} = (1 - \xi_w) \left(\frac{\widehat{w}_t^*}{\widehat{w}_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} + \xi_w \left(\frac{\pi_t^{\gamma_w} \pi_t^{1-\gamma_w}}{\widehat{\varpi}_t \pi_t} \right)^{-(1+\psi_s)\theta_s} \nabla_{w,t-1} \quad (\text{B.15})$$

Pour les conditions d'équilibre sur les marchés des biens et facteurs il suffit de rajouter des chapeaux...

B.2 État stationnaire

À l'état stationnaire, nous avons

$$\left(\widehat{C} - \frac{\eta}{1+g} \widehat{C} \right)^{-\sigma_c} \exp \left\{ \widetilde{L} \frac{\sigma_c - 1}{1 + \sigma_l} \right\} = (1 + \bar{\tau}_C) \widehat{\lambda} \quad (\text{B.16})$$

$$(1 - \bar{\tau}_R) \widehat{\lambda} = \beta \bar{\varepsilon}_B R(1 + g)^{-\sigma_c} \frac{\widehat{\lambda}(1 - \bar{\tau}_R)}{\pi^*} \quad (\text{B.17})$$

$$\left[\widehat{C} - \frac{\eta}{1 + g} \widehat{C} \right]^{1 - \sigma_c} \frac{\widehat{L}}{L} \exp \left\{ \widehat{L} \frac{\sigma_c - 1}{1 + \sigma_l} \right\} = \widehat{\lambda}(1 - \bar{\tau}_R)(1 - \bar{\tau}_W) \widehat{w}^m \quad (\text{B.18})$$

$$Q = 1 \quad (\text{B.19})$$

$$\delta'(\bar{z}) = (1 - \bar{\tau}_R) r^k \quad (\text{B.20})$$

$$1 = \beta(1 + g)^{-\sigma_c} \left(1 - \bar{\delta} + (1 - \bar{\tau}_R) r^k \bar{z} \right) \quad (\text{B.21})$$

$$\widehat{K} = \frac{1 + g}{g + \bar{\delta}} \widehat{I} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{(1 + \bar{\tau}_L) \widehat{w} L^d}{r^k \widehat{K}^d} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (\text{B.23})$$

$$mc = \left(\frac{r^k}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{(1 + \bar{\tau}_L) \widehat{w}}{1 - \alpha} \right)^{1 - \alpha} \bar{\mathcal{A}}_C^{\alpha - 1} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{P^*}{P} = \frac{\theta_f(1 + \psi_f)}{\theta_f(1 + \psi_f) - 1} \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_1}{\widehat{\mathcal{Z}}_2} + \frac{\psi_f}{\theta_f(1 + \psi_f) - 1} \left(\frac{P^*}{P} \right)^{1 + (1 + \psi_f)\theta_f} \frac{\widehat{\mathcal{Z}}_3}{\widehat{\mathcal{Z}}_2} \quad (\text{B.25})$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_1 = \widehat{\lambda} mc \Theta^{(1 + \psi_f)\theta_f} \widehat{Y} + \beta \xi_p (1 + g)^{1 - \sigma_c} \widehat{\mathcal{Z}}_1 \quad (\text{B.26a})$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_2 = \widehat{\lambda} \Theta^{(1 + \psi_f)\theta_f} \widehat{Y} + \beta \xi_p (1 + g)^{1 - \sigma_c} \widehat{\mathcal{Z}}_2 \quad (\text{B.26b})$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_3 = \widehat{\lambda} \widehat{Y} + \beta \xi_p (1 + g)^{1 - \sigma_c} \widehat{\mathcal{Z}}_3 \quad (\text{B.26c})$$

$$\vartheta_f = \frac{P^*}{P} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\psi_f \vartheta_f}{1 + \psi_f} + \frac{\Theta}{1 + \psi_f} = 1 \quad (\text{B.28})$$

$$\Delta_p = \frac{1}{1 + \psi_f} \Theta^{(1 + \psi_f)\theta_f} \nabla_p + \frac{\psi_f}{1 + \psi_f} \quad (\text{B.29a})$$

$$\nabla_p = \left(\frac{P_t^*}{P_t} \right)^{-(1 + \psi_f)\theta_f} \quad (\text{B.29b})$$

$$\Theta = \frac{P^*}{P} \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\widehat{w}^*}{\widehat{w}} = \frac{\theta_s(1 + \psi_s)}{\theta_s(1 + \psi_s) - 1} \frac{\widehat{\mathcal{H}}_1}{\widehat{\mathcal{H}}_2} + \frac{\psi_s}{\theta_s(1 + \psi_s) - 1} \left(\frac{\widehat{w}^*}{\widehat{w}} \right)^{1 + (1 + \psi_s)\theta_s} \frac{\widehat{\mathcal{H}}_3}{\widehat{\mathcal{H}}_2} \quad (\text{B.31})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \widehat{\lambda} \widehat{w}^m \mathcal{L} \Upsilon^{(1 + \psi_s)\theta_s} + \beta \xi_w (1 + g)^{1 - \sigma_c} \widehat{\mathcal{H}}_1 \quad (\text{B.32a})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_2 = \widehat{\lambda} \widehat{w} \mathcal{L} \Upsilon^{(1 + \psi_s)\theta_s} + \beta \xi_w (1 + g)^{1 - \sigma_c} \widehat{\mathcal{H}}_2 \quad (\text{B.32b})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_3 = \widehat{\lambda} \widehat{w} \mathcal{L} + \beta \xi_w (1 + g)^{1 - \sigma_c} \widehat{\mathcal{H}}_3 \quad (\text{B.32c})$$

$$\vartheta_s = \frac{\widehat{w}^*}{\widehat{w}} \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\psi_s \vartheta_s}{1 + \psi_s} + \frac{\Upsilon}{1 + \psi_s} = 1 \quad (\text{B.34})$$

$$\Delta_w = \frac{1}{1 + \psi_s} \Upsilon^{(1 + \psi_s)\theta_s} \nabla_w + \frac{\psi_s}{1 + \psi_s} \quad (\text{B.35a})$$

$$\nabla_w = \left(\frac{\widehat{w}^*}{\widehat{w}} \right)^{-(1 + \psi_s)\theta_s} \quad (\text{B.35b})$$

$$\Upsilon = 1 \quad (\text{B.36})$$

$$R = R^* \quad (\text{B.37})$$

$$\Delta_p \widehat{Y} = \left(\widehat{K}^d \right)^\alpha \left(\bar{\mathcal{A}}_C L^d \right)^{1 - \alpha} \quad (\text{B.38})$$

$$L = \Delta_w \mathcal{L} \quad (\text{B.39})$$

$$L^d = \Delta_w \mathcal{L} \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\bar{z}}{1 + g} \widehat{K} = \widehat{K}^d \quad (\text{B.41})$$

$$\widehat{C} + \widehat{I} = (1 - g^*) \widehat{Y} \quad (\text{B.42})$$

Nous pouvons écrire les équations (B.26a) à (B.26c) de façon équivalente :

$$\widehat{\mathcal{Z}}_1 = \frac{\widehat{\lambda} mc \Theta^{(1 + \psi_f)\theta_f} \widehat{Y}}{1 - \beta \xi_p (1 + g)^{1 - \sigma_c}} \quad (\text{B.43a})$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_2 = \frac{\widehat{\lambda} \Theta^{(1 + \psi_f)\theta_f} \widehat{Y}}{1 - \beta \xi_p (1 + g)^{1 - \sigma_c}} \quad (\text{B.43b})$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_3 = \frac{\widehat{\lambda} \widehat{Y}}{1 - \beta \xi_p (1 + g)^{1 - \sigma_c}} \quad (\text{B.43c})$$

En substituant dans (B.25) il vient :

$$\frac{P^*}{P} = \frac{\theta_f(1 + \psi_f)}{\theta_f(1 + \psi_f) - 1} mc + \frac{\psi_f}{\theta_f(1 + \psi_f) - 1} \left(\frac{P^*}{P} \right)^{1 + (1 + \psi_f)\theta_f} \Theta^{-(1 + \psi_f)\theta_f} \quad (\text{B.44})$$

qui définit implicitement le coût marginal réel à l'état stationnaire comme une fonction du prix relatif optimal P^*/P et du multiplicateur de Lagrange du programme de la firme représentative produisant le bien homogène. Par ailleurs, en substituant l'équation (B.30) dans (B.28), (B.27), (B.29b) et (B.29a) il vient :

$$\Theta = \vartheta_f = \frac{P^*}{P} = \nabla_p = \Delta_p = 1 \quad (\text{B.45})$$

Le coût marginal réel à l'état stationnaire est donc :

$$mc = \frac{\theta_f(1 + \psi_f) - 1}{\theta_f(1 + \psi_f)} - \frac{\psi_f}{\theta_f(1 + \psi_f)} = \frac{\theta_f - 1}{\theta_f} \quad (\text{B.46})$$

Finalement en substituant (B.30) dans les équations (B.43a) à (B.43c) il vient :

$$\widehat{\mathcal{L}}_1 = mc \frac{\widehat{\lambda}\widehat{Y}}{1 - \beta\xi_p(1 + g)^{1-\sigma_c}} \quad (\text{B.47a})$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_2 = \widehat{\mathcal{L}}_3 = \widehat{\mathcal{L}}_1/mc \quad (\text{B.47b})$$

où $\widehat{\lambda}$, \widehat{Y} seront déterminés plus bas avec les autres variables réelles.

Nous pouvons écrire les équations (B.32a) à (B.32c) de la façon suivante :

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \frac{\widehat{\lambda}\widehat{w}^m \mathcal{L}\Upsilon^{(1+\psi_s)\theta_s}}{1 - \beta\xi_w(1 + g)^{1-\sigma_c}} \quad (\text{B.48a})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_2 = \frac{\widehat{\lambda}\widehat{w} \mathcal{L}\Upsilon^{(1+\psi_s)\theta_s}}{1 - \beta\xi_w(1 + g)^{1-\sigma_c}} \quad (\text{B.48b})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_3 = \frac{\widehat{\lambda}\widehat{w} \mathcal{L}}{1 - \beta\xi_w(1 + g)^{1-\sigma_c}} \quad (\text{B.48c})$$

En substituant dans (B.31) il vient :

$$\frac{\widehat{w}^*}{\widehat{w}} = \frac{\theta_s(1 + \psi_s)}{\theta_s(1 + \psi_s) - 1} \frac{\widehat{w}^m}{\widehat{w}} + \frac{\psi_s}{\theta_s(1 + \psi_s) - 1} \left(\frac{\widehat{w}^*}{\widehat{w}} \right)^{1+(1+\psi_s)\theta_s} \Upsilon^{-(1+\psi_s)\theta_s} \quad (\text{B.49})$$

qui définit implicitement le rapport du salaire réel perçu par le ménage au salaire réel moyen payé par les firmes à l'agence d'emploi comme une fonction du salaire réel relatif optimal $\widehat{w}^*/\widehat{w}$ et du multiplicateur de Lagrange du programme de l'agence d'emploi. Par ailleurs, en substituant l'équation (B.36) dans les équations (B.34), (B.33), (B.35b) et (B.35a) il vient :

$$\Upsilon = \vartheta_s = \frac{\widehat{w}^*}{\widehat{w}} = \nabla_w = \Delta_w = 1 \quad (\text{B.50})$$

Ainsi nous avons :

$$\frac{\widehat{w}^m}{\widehat{w}} = \frac{\theta_s(1 + \psi_s) - 1}{\theta_s(1 + \psi_s)} - \frac{\psi_s}{\theta_s(1 + \psi_s)} \quad (\text{B.51})$$

Finalement, en substituant (B.36) dans (B.48a) à (B.48c) il vient :

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \widehat{w}^m \frac{\widehat{\lambda}\mathcal{L}}{1 - \beta\xi_w(1 + g)^{1-\sigma_c}} \quad (\text{B.52a})$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_2 = \widehat{\mathcal{H}}_3 = \widehat{\mathcal{H}}_1 \frac{\widehat{w}}{\widehat{w}^m} \quad (\text{B.52b})$$

Les équations (B.37) et (B.17) impliquent :

$$R^* = \frac{\pi^*}{\bar{\varepsilon}_B \beta} (1 + g)^{\sigma_c} \quad (\text{B.53})$$

En pratique, nous estimons (ou calibrons) R^* et π^* puis déduisons β conditionnellement à l'estimation courante du taux de croissance le long du sentier de croissance équilibré, g , et du niveau de long terme de l'imposition sur les revenus $(1 - \bar{\tau}_R)$. À partir de l'équation (B.21) nous obtenons le rémunération du capital à l'état stationnaire :

$$r^k = \frac{(1 + g)^{\sigma_c} - \beta(1 - \bar{\delta})}{\beta(1 - \bar{\tau}_R)\bar{z}} \quad (\text{B.54})$$

où $\bar{\delta}$ et \bar{z} sont calibrés (ou estimés). L'équation (B.20) pose la contrainte suivante sur la dérivée de la fonction de dépréciation à l'état stationnaire :

$$\delta'(\bar{z}) = \frac{(1 + g)^{\sigma_c} - \beta(1 - \bar{\delta})}{\beta\bar{z}} \quad (\text{B.55})$$

Conditionnellement aux niveaux de long terme du coût marginal réel et de la rémunération du capital nous obtenons le salaire réel moyen (rapporté à l'efficacité tendancielle du travail) à l'état stationnaire en utilisant l'équation (B.24) :

$$\widehat{w} = \left[mc \left(\frac{\alpha}{r^k} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1 - \alpha}{1 + \bar{\tau}_L} \bar{\mathcal{A}}_C \quad (\text{B.56})$$

Le long du sentier de croissance équilibré le taux de croissance du salaire réel est le taux de croissance de l'efficience Harrod neutre :

$$\varpi = 1 + g \quad (\text{B.57})$$

En substituant (B.56) dans (B.46) on obtient le salaire réel perçu par le ménage (toujours normalisé par l'efficacité tendancielle du travail) à l'état stationnaire

$$\widehat{w}^m = \left(\frac{\theta_s(1 + \psi_s) - 1}{\theta_s(1 + \psi_s)} - \frac{\psi_s}{\theta_s(1 + \psi_s)} \right) \left[mc \left(\frac{\alpha}{r^k} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1 - \alpha}{1 + \bar{\tau}_L} \quad (\text{B.58})$$

Puisque les distorsions de prix et de salaire sont nulles à l'état stationnaire, nous avons :

$$L^d = \mathcal{L} = L \quad (\text{B.59})$$

et

$$\hat{Y} = \hat{y} = \left(\hat{K}^d\right)^\alpha \left(\bar{\mathcal{A}}_C L^d\right)^{1-\alpha} \quad (\text{B.60})$$

Dans la suite on note de façon générique $\chi_{X,Y}$ le ratio de deux variables X et Y . L'équation (B.23) et (B.59) donne le ratio de la demande de capital à la quantité de travail à l'état stationnaire :

$$\chi_{\hat{K}^d,L} = \frac{(1 + \bar{\tau}_L)\hat{w}}{r^k} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (\text{B.61})$$

En utilisant les équations (B.59), (B.60) et (B.61) il s'ensuit que le produit par tête à l'état stationnaire est :

$$\chi_{\hat{Y},L} = \chi_{\hat{K}^d,L}^\alpha \bar{\mathcal{A}}_C^{1-\alpha} \quad (\text{B.62})$$

On peut écrire l'équilibre sur le marché du bien final (B.42) de la façon suivante :

$$\chi_{\hat{C},\hat{Y}} + \chi_{\hat{I},\hat{Y}} = 1 - g^* \quad (\text{B.63})$$

En utilisant la condition d'équilibre sur le marché du capital (B.41) ainsi que les équations (B.61), (B.62) et (B.22) on obtient le ratio de l'investissement au produit à l'état stationnaire :

$$\chi_{\hat{I},\hat{Y}} = \frac{g + \bar{\delta}}{\bar{z}} \chi_{\hat{K}^d,L}^{1-\alpha} \bar{\mathcal{A}}_C^{\alpha-1} \quad (\text{B.64})$$

Nous pouvons donc déterminer $\chi_{\hat{C},\hat{Y}}$ par complémentarité à l'aide de l'équation (B.63). En divisant (B.18) par (B.16) nous obtenons :

$$\left(\hat{C} - \frac{\eta}{1+g}\hat{C}\right) \frac{\tilde{L}}{L} = \hat{w}^m \frac{(1 - \bar{\tau}_R)(1 - \bar{\tau}_W)}{1 + \bar{\tau}_C}$$

En multipliant et divisant le membre de gauche par \hat{Y} , on a de façon équivalente :

$$\chi_{\hat{C},\hat{Y}} \chi_{\hat{Y},L} \left(1 - \frac{\eta}{1+g}\right) \tilde{L} = \hat{w}^m \frac{(1 - \bar{\tau}_R)(1 - \bar{\tau}_W)}{1 + \bar{\tau}_C}$$

et donc :

$$\tilde{L} = \frac{\hat{w}^m}{\chi_{\hat{C},\hat{Y}} \chi_{\hat{Y},L}} \frac{(1 - \bar{\tau}_R)(1 - \bar{\tau}_W)}{1 + \bar{\tau}_C} \frac{1+g}{1+g-\eta} \quad (\text{B.65})$$

Il s'ensuit :

$$\hat{Y} = \chi_{\hat{Y},L} L \quad (\text{B.66})$$

$$\hat{C} = \chi_{\hat{C},\hat{Y}} \hat{Y} \quad (\text{B.67})$$

$$\hat{I} = \chi_{\hat{I},\hat{Y}} \hat{Y} \quad (\text{B.68})$$

Enfin le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire du ménage à l'état stationnaire est obtenu à partir de l'équation (B.16) :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{1 + \bar{\tau}_C} \left(\hat{C} - \frac{\eta}{1+g}\hat{C}\right)^{-\sigma_c} \exp\left\{\tilde{L} \frac{1 - \sigma_c}{1 + \sigma_l}\right\} \quad (\text{B.69})$$

C Le modèle efficient

Avec la règle de Taylor postulée en (2.11), nous supposons que l'autorité monétaire réagit à toute déviation du produit effectif au produit (efficient) que nous observerions dans un monde idéal sans rigidités nominales (sur les prix et les salaires). Pour obtenir le produit efficient nous devons *doubler* le modèle avec un modèle sans rigidités nominales (un modèle RBC avec compétition monopolistique et des rigidités réelles). Les équations suivantes décrivent ce modèle.

Rien ne change du côté des ménages, il suffit de changer les notations et d'écrire l'équation d'Euler en faisant apparaître le taux d'intérêt réel. En posant directement les variables *détrendées*, nous avons donc :

$$\left(\hat{C}_t^* - \eta \frac{\mathcal{A}_{T,t-1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \hat{C}_{t-1}^*\right)^{-\sigma_c} \exp\left\{\varepsilon_{L,t} \frac{1 - \sigma_c}{1 + \sigma_l} L_t^{*1+\sigma_l}\right\} = (1 + \tau_{C,t}) \hat{\lambda}_t^* \quad (\text{C.1})$$

$$(1 - \tau_{R,t}) \hat{\lambda}_t^* = \beta \varepsilon_{B,t} \mathcal{R}_t^* \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}}\right)^{-\sigma_c} (1 - \tau_{R,t+1}) \hat{\lambda}_{t+1}^* \right] \quad (\text{C.2})$$

$$\left[\hat{C}_t^* - \eta \frac{\mathcal{A}_{T,t-1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \hat{C}_{t-1}^*\right]^{1-\sigma_c} \frac{\varepsilon_{L,t}}{L} \exp\left\{\varepsilon_{L,t} \frac{\sigma_c - 1}{1 + \sigma_l} \left(\frac{L_t^*}{L}\right)^{1+\sigma_l}\right\} \left(\frac{L_t^*}{L}\right)^{\sigma_l} = \hat{\lambda}_t^* (1 - \tau_{R,t}) (1 - \tau_{W,t}) \hat{w}_t^{*m} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{p_{I,t}}{\varepsilon_{I,t}} = Q_t^* & \left[1 - S \left(\frac{\hat{I}_t^*}{\hat{I}_{t-1}^*} \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}} \right) - \frac{\hat{I}_t^*}{\hat{I}_{t-1}^*} \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}} S' \left(\frac{\hat{I}_t^*}{\hat{I}_{t-1}^*} \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}} \right) \right] \\ & + \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\hat{\lambda}_{t+1}^*}{\hat{\lambda}_t^*} \left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}}\right)^{-\sigma_c} Q_{t+1}^* \frac{\varepsilon_{I,t+1}}{\varepsilon_{I,t}} \left(\frac{\hat{I}_{t+1}^*}{\hat{I}_t^*} \frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}}\right)^2 S' \left(\frac{\hat{I}_{t+1}^*}{\hat{I}_t^*} \frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$Q_t^* \delta' (z_t^*) = (1 - \tau_{R,t}) r_t^{k*} \quad (\text{C.5})$$

$$Q_t^* = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{\hat{\lambda}_{t+1}^*}{\hat{\lambda}_t^*} \left(\frac{\mathcal{A}_{T,t+1}}{\mathcal{A}_{T,t}}\right)^{-\sigma_c} \left(Q_{t+1}^* (1 - \delta(z_{t+1}^*)) + (1 - \tau_{R,t+1}) r_{t+1}^{k*} z_{t+1}^*\right) \right] \quad (\text{C.6})$$

$$\hat{K}_t^* = (1 - \delta(z_t^*)) \frac{\mathcal{A}_{T,t-1}}{\mathcal{A}_{T,t}} \hat{K}_{t-1}^* + \varepsilon_{I,t} \left(1 - S \left(\frac{\hat{I}_t^*}{\hat{I}_{t-1}^*} \frac{\mathcal{A}_{T,t}}{\mathcal{A}_{T,t-1}}\right)\right) \hat{I}_t^* \quad (\text{C.7})$$

Du côté de la production de biens, le comportement des firmes du secteur du bien final est inchangé. Pour les firmes du facteurs (minimi-

sation des coûts) est lui aussi inchangé (nous retrouvons la même frontière des prix des facteurs), nous avons donc :

$$\frac{(1 + \tau_{L,t})\widehat{w}_t^* L_t^{d*}}{r_t^{k*} \widehat{K}_t^{d*}} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (\text{C.8})$$

le coût marginal s'écrit :

$$mc_t^* = A_{C,t}^{\alpha-1} \left(\frac{r_t^{k*}}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{\tau_{L,t} \widehat{w}_t^*}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \quad (\text{C.9})$$

Le comportement de prix est grandement simplifié, puisque les firmes ont, dans cet environnement, la possibilité de changer le prix à toutes les dates. Ainsi, le programme des firmes devient statique, elles appliquent simplement un taux de marge sur le coût marginal. En posant $\xi_p = 0$ il vient directement :

$$1 = \frac{\theta_f(1 + \psi_f)}{\theta_f(1 + \psi_f) - 1} \frac{mc_t^*}{\varepsilon_{y,t}} + \frac{\psi_f}{\theta_f(1 + \psi_f) - 1} \quad (\text{C.10})$$

Le comportement de l'agence d'emploi est inchangé. Enfin, le programme de chaque syndicat devient statique, en posant ξ_w on trouve directement :

$$1 = \frac{\theta_s(1 + \psi_s)}{\theta_s(1 + \psi_s) - 1} \frac{\widehat{w}_t^{m*}}{\varepsilon_{l,t} \widehat{w}_t^*} + \frac{\psi_s}{\theta_s(1 + \psi_s) - 1} \quad (\text{C.11})$$

À l'équilibre du marché du facteur travail, nous avons :

$$L^* = \mathcal{L}^* = L^{d*} \quad (\text{C.12})$$

À l'équilibre du marché du capital physique, nous avons :

$$\frac{\mathcal{A}_{t-1}^T}{\mathcal{A}_t^T} z_t^* \widehat{K}_{t-1}^* = \widehat{K}_t^{d*} \quad (\text{C.13})$$

Finalement, à l'équilibre du marché du bien final, nous avons :

$$\widehat{C}_t^* + p_{I,t} \widehat{I}_t^* = (1 - g_t) \widehat{Y}_t^* \quad (\text{C.14})$$

avec

$$\widehat{Y}_t^* = \widehat{K}_t^{d*\alpha} \left(\mathcal{A}_t^C L_t^d \right)^{1-\alpha} \quad (\text{C.15})$$

D Spécification des formes fonctionnelles

D.1 La fonction de dépréciation

Le taux de dépréciation du stock de capital physique dépend du taux d'utilisation du capital. Cette fonction vérifie $\delta(0) = 0$, $\delta(z)' > 0$ pour tout $z \in [0, 1]$ et on notera $\delta(\bar{z}) = \bar{\delta}$. Nous utiliserons la forme fonctionnelle suivante :

$$\delta(z) = \bar{\delta} e^{\frac{\bar{\delta}'}{\bar{\delta}}(z - \bar{z})} \quad (\text{D.1})$$

où $\bar{\delta}' \equiv \delta'(\bar{z})$ est la dérivée première du taux de dépréciation évaluée à l'état stationnaire. Ce paramètre est lié aux paramètres $g, \sigma_c, \beta, \bar{\delta}$ et \bar{z} via l'équation (B.55) :

$$\bar{\delta}' = \frac{(1 + g)^{\sigma_c} - \beta(1 - \bar{\delta})}{\beta \bar{z}} > 0$$

Ce paramètre ne doit donc pas être étalonné ou estimé.

D.2 La fonction de coût d'ajustement de l'investissement

L'ajustement du niveau d'investissement est coûteux pour le ménage. La fonction \mathcal{S} rend compte de ce coût, on suppose que $\mathcal{S}(1 + g) = 0$, de sorte que le coût d'ajustement est nul le long du sentier de croissance équilibrée, et nous supposons $\mathcal{S}(1)' = 0$ ainsi que la convexité du coût $\mathcal{S}'' > 0$. Nous choisissons la forme fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{S}(x) \equiv \frac{\psi}{2} (x - (1 + g))^2 \quad (\text{D.2})$$

où $x \equiv I_t/I_{t-1}$ est le facteur de croissance de l'investissement et ψ un paramètre réel positif mesurant la taille du coût d'ajustement (il devra être estimé). Nous pouvons exprimer le coût en fonction de l'investissement stationnarisé de la façon suivante :

$$\mathcal{S}\left(\frac{\widehat{I}_t}{\widehat{I}_{t-1}}\right) \equiv \frac{\psi(1 + g)^2}{2} \left(\frac{\widehat{I}_t}{\widehat{I}_{t-1}} \frac{A_{T,t}}{A_{T,t-1}} \frac{1}{1 + g} - 1 \right)^2$$

D.3 Part de la rémunération du travail à long terme

Le paramètre α de la fonction de production Cobb-Douglas utilisée par les firmes du secteur intermédiaire est lié à la part de la rémunération du travail à long terme. Nous pourrions exploiter cette information pour former nos croyances sur α , ou même ne pas estimer α mais la part de la rémunération du travail puis déduire la valeur du paramètre technologique. On établit facilement qu'à l'état stationnaire nous avons :

$$\frac{wL}{Y} = \frac{\theta_f - 1}{\theta_f} \frac{1 - \alpha}{1 + \bar{\tau}_L}$$

Soit de façon équivalente :

$$\alpha = 1 - (1 + \bar{\tau}_L) \frac{\theta_f}{\theta_f - 1} \frac{wL}{Y}$$

E Les données

Données des comptes nationaux trimestriels :

- PIB : Euro area 16 (fixed composition) - Gross domestic product at market price - Chain linked volumes, reference year 2000 - ECU/euro - Seasonally and partly working day adjusted, mixed method of adjustment, Eurostat code : B1GM/EA16/SWDA/MIO_EUR_CLV2000.
- Consommation en volume : Euro area 16 (fixed composition) - Final consumption of households and NPISH's (private consumption) - Chain linked volumes, reference year 2000 - ECU/euro - Seasonally and partly working day adjusted, mixed method of adjustment, Eurostat code : P31_S14_S15/EA16/SWDA/MIO_EUR_CLV2000.
- Investissement : Euro area 16 (fixed composition) - Gross fixed capital formation - Chain linked volumes, reference year 2000 - ECU/euro - Seasonally and partly working day adjusted, mixed method of adjustment, Eurostat code : P51/EA16/SWDA/MIO_EUR_CLV2000.
- Masse salariale brute en valeur : Euro area 16 (fixed composition) - Gross wages and salaries, domestic, Current prices, ECU/euro, Seasonally and partly working day adjusted, mixed method of adjustment, Main series, Eurostat code : D11/EA16/SA/MIO_EUR.
- Déflateur de la consommation : Euro area 16 (fixed composition) - Final consumption of households and NPISH's (private consumption), Deflator, National currency, Neither seasonally nor working day adjusted, Index, Eurostat code : P31_S14_S15/EA16/SWDA/CPI00_EUR.

Autres indicateurs :

- IPCH : Euro area 16 (fixed composition) - HICP - Overall index, Neither seasonally nor working day adjusted, Monthly Index, Eurostat code : VAL.IDX05.EMU16.00
- TUC : Capacity utilisation in manufacturing, total, Seasonally adjusted, Euro area 16, Eurostat code : TEIBS070.
- Taux d'intérêt : Euro interbank offered rate (deposit) 3 months, data collected at 11 pm central european time (CET), monthly average of working days, Eurostat code : TEIMF040.
- Heures travaillées : Euro area (16 countries) - Total annual hours worked total economy - millions - AMECO data class Data in 1000 persons. SEBC seulement, à ne pas publier.
- Population 15-64 ans : Euro area 16 (fixed composition) ; European Labour Force Survey ; Population ; Total ; Age 15 to 64 ; Female & Male ; Neither seasonally nor working day adjusted ²².

Variables	KPSS ^a	SP ^b	ERS ^c			
			1	2	3	4
$\log Y_t$	0,2505	-2,4882	-1,4300	-1,8044	-1,7544	-1,8108
$\log C_t$	0,3263	-1,6726	-0,2993	-0,6329	-1,1907	-1,0419
$\log I_t$	0,1736	-2,6330	-1,3383	-1,7708	-1,9635	-3,2123
$\log w_t L_t$	0,1736	-2,1829	-0,9457	-1,4436	-1,8654	-2,7356
$\log z_t$	0,1744	-	-2,7788	-3,1183	-2,8923	-2,6690
$\log \pi_t$	0,3344	-	-3,1083	-2,5003	-2,6126	-2,3912
$\log R_t$	0,1885	-	-1,4296	-1,6210	-1,6690	-1,4785

a. Statistique de Kwiatkowski *et al.* (1992). Pour les variables qui ont théoriquement une tendance ($\log Y_t$, $\log C_t$, $\log I_t$, $\log w_t$) l'hypothèse nulle est I(0)+T contre l'hypothèse alternative I(1)+T. Les valeurs critiques à 1%, 5% et 10% sont alors respectivement de 0,216 0,146 et 0,119. Pour les variables supposées stationnaires autour d'une constante ($\log \pi_t$, $\log R_t$ et $\log z_t$) l'hypothèse nulle est I(0)+C et les valeurs critiques à 1%, 5% et 10% sont 0,739 0,463 et 0,347.

b. Statistique de Schmidt et Phillips (1992). Pour les variables qui ont théoriquement une tendance ($\log Y_t$, $\log C_t$, $\log I_t$, $\log w_t$) l'hypothèse nulle est I(1)+T et les valeurs critiques à 1%, 5% et 10% sont -3,73 -3,11 et -2,80. Pour les variables supposées stationnaires autour d'une constante ($\log \pi_t$, $\log R_t$ et $\log z_t$) le test de Schmidt-Phillips n'est pas applicable.

c. Statistique de Elliott *et al.* (1996). Chaque colonne correspond au nombre de retards considérés pour la différence première de la variable endogène. Pour les variables qui ont théoriquement une tendance ($\log Y_t$, $\log C_t$, $\log I_t$, $\log w_t$) l'hypothèse nulle est I(1)+T et les valeurs critiques à 1%, 5% et 10% sont -3,58 -3,03 et -2,74. Pour les variables supposées stationnaires autour d'une constante ($\log \pi_t$, $\log R_t$ et $\log z_t$) l'hypothèse nulle est I(1)+C et les valeurs critiques à 1%, 5% et 10% sont -2,61 -1,95 et -1,62. Pour chaque variable, la statistique calculée en utilisant le nombre de retards qui maximise le R² ajusté est notée en gras.

TABLE 3 – Stationnarité de l'échantillon.

22. La série Eurostat est rétropolée avant 2000, annualisée après 2005 puis trimestrialisée sur l'ensemble de la période couverte en utilisant un spline cubique, avant d'être utilisée pour détendre les séries de PIB, de consommation, d'investissement, de masse salariale et d'heures travaillées.

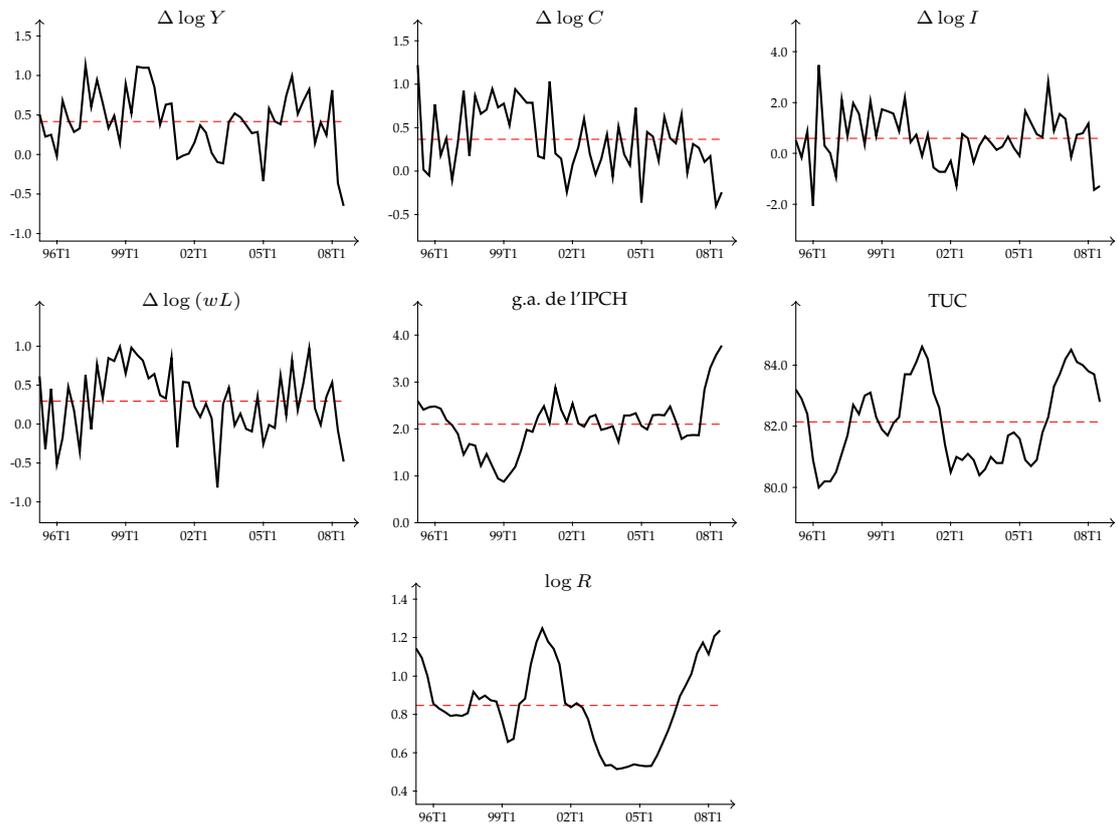


FIGURE 4 – Les données.